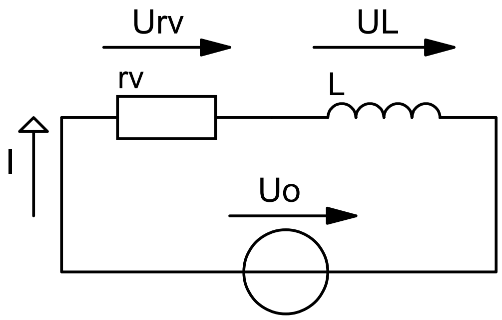
A soros rL-modell vizsgálata

A veszteséges tekercs egy tiszta induktivitással, valamint a veszteségi teljesítményből származtatható ellenállással modellezhető. Ez utóbbi komponens a következőkből tevődik össze:

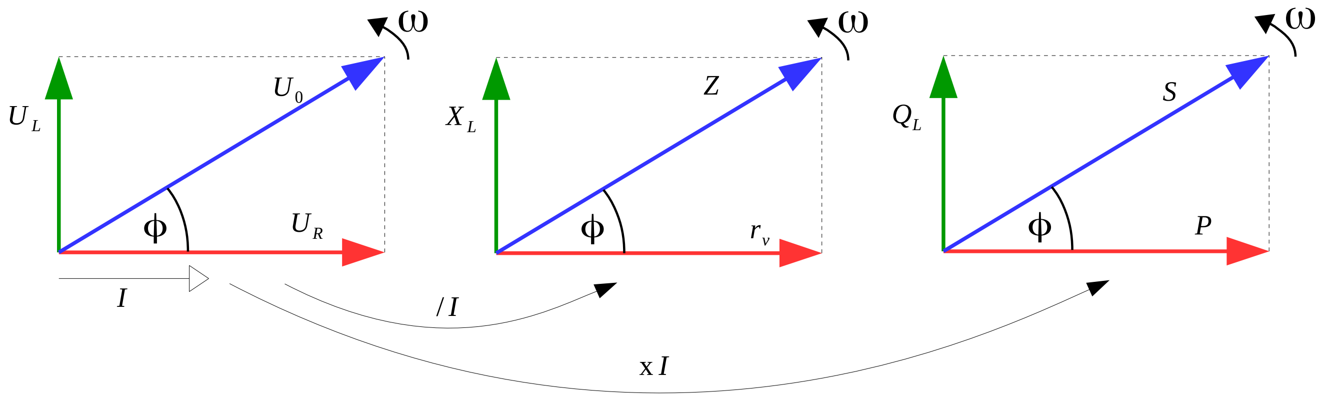
- a tekercshuzal ohmos ellenállása (fajlagos ellenállás, hossz, keresztmetszet);
- a szkin-effektus miatti ellenállása;
- a vasmag veszteségei (örvényáramú- és hiszterézisveszteség).

A veszteség minden esetben hő formájában jelenik meg. A veszteséges – és egyben valóságos – tekercs helyettesítő képe lehet soros (1. ábra), valamint párhuzamos is. A soros modellben szereplő r ellenálláson létrejövő hőteljesítmény megegyezik a valóságos tekercsen létrejövő hatásos teljesítménnyel.



1. ábra

Ismétlésképpen vegyük fel a soros RL-kör fázorábráit!



2. ábra A soros RL-kör fázorábrái (feszültség-, impedancia- és teljesítmény-)

Mindezek tükrében elmondható, hogy egy soros RL-körnek annál nagyobb a jósága, minél kisebb a veszteségi ellenállása (így a veszteségi teljesítménye), illetve minél nagyobb az induktív reaktancia és a veszteségi ellenállás aránya. Emellett látható az is, hogy a tekercs reaktanciája frekvenciafüggő $(X_L = \omega \cdot L)$, a frekvencia növekedésével nő, így vele együtt – bizonyos határig – a jóság is nő.

A valóságos tekercs jósága tehát: $\boxed{Q = \frac{X_L}{r} = tg\,\phi}$. Ez a meredekség.

A jóság frekvenciafüggősége: $Q = \frac{X_L}{r} = \frac{\omega \cdot L}{r} = \omega \cdot \frac{L}{r} = \omega \cdot \tau$, ahol $\tau = \frac{L}{r}$ az időállandó.

Az ideális tekercsnek a vesztesége nulla, ez soros modellben úgy képzelhető el, hogy r veszteségi komponens nulla értékű. A meredekség segítségével könnyen bizonyítható, hogy a veszteség (ideális) nélküli tekercs jósága végtelen nagy:

$$Q = tg\,\phi = \frac{X_L}{r} = \lim_{r \Rightarrow 0} \frac{X_L}{r} = X_L \cdot \lim_{r \Rightarrow 0} \frac{1}{r} = \infty$$

Lássuk meg, hogy veszteségi ellenállás csökkenése (és így a veszteségi teljesítmény csökkenése) esetén a ϕ szög értéke tart a 90^o-hoz, így a meredekség a végtelenhez! Gondoljunk csak arra, hogy 90^o-hoz tartva a $tg\,\phi$ a végtelenhez tart! Természetesen a veszteségmentes tekercs csak idea.

A fázorábrákat megfigyelve a következő azonosságokat tudjuk felírni: $Q=tg\,\phi=\frac{X_L}{r}=\frac{U_L}{U_R}=\frac{Q_L}{P}$,

vagyis a jóság a képzetes komponens és a veszteségi komponens hányadosa: $\left[\frac{\text{képzetes}}{\text{veszteségi}}\right]$.

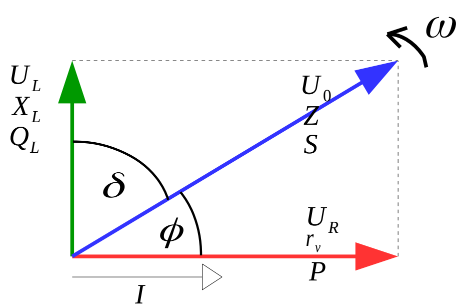
Azt, hogy a valóságos tekercs mennyire tér el az ideálistól, úgy mondhatjuk meg legegyszerűbben, ha megadjuk: fáziseltolása mennyivel kisebb, mint 90^o. A 3. ábrán látható, hogy a ϕ szög, valamint a δ – úgynevezett – veszteségi szög mindenkori összege 90^o. (102. ábra). Ha a veszteségi ellenállás nagyobb, nagyobb a veszteségi szög is.

A $tg\,\delta=\frac{r}{X_L}$ meredekség a veszteségi tényező.

Ha egy tekercsnek nagy a jósága, az azt jelenti, hogy kicsi a vesztesége.

Tehát a jóság és a veszteség fordított arányban van egymással.

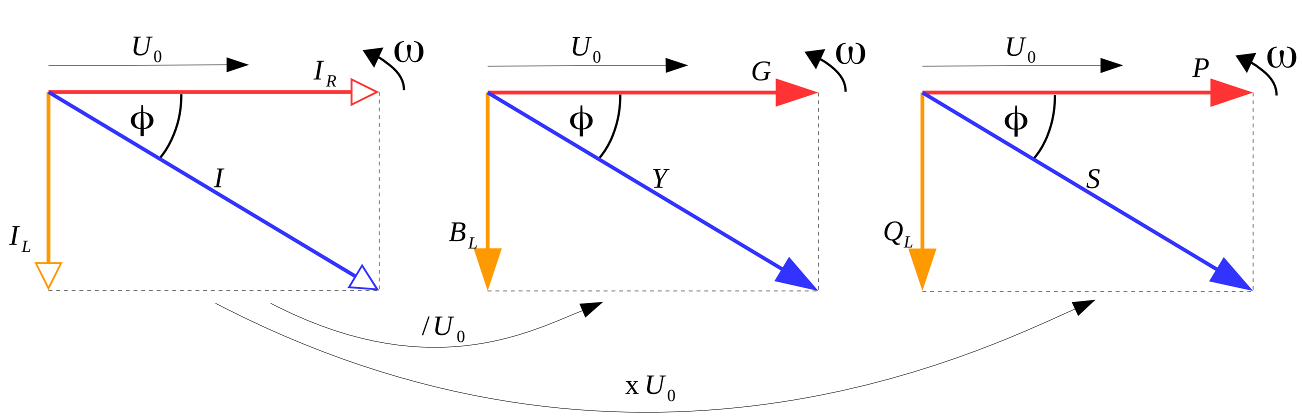
$$Q=\frac{1}{tg\,\delta}=tg\,\phi$$



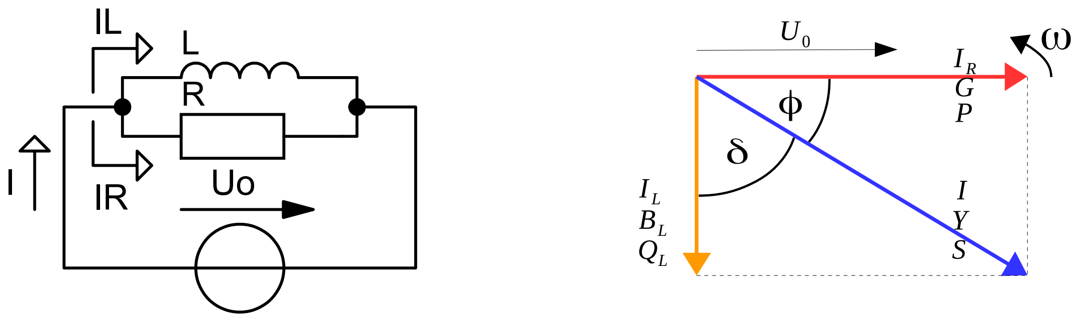
3. ábra

A párhuzamos RL-modell vizsgálata

Habár a valóságos tekercs helyettesítő modellezésére a javarészt soros képet alkalmazzuk, könnyen elkészíthető a párhuzamos modell is. A veszteséges tekercs párhuzamos helyettesítő képének vizsgálatához idézzük fel a fázorábrákat!



4. ábra A párhuzamos RL-kör fázorábrái (áram-, admittancia- és teljesítmény-)



5. ábra A párhuzamos RL-helyettesítő kép kapcsolási rajza és fázorábrája

A párhuzamos modell esetében a veszteségi komponens párhuzamos. Belátható, hogy a kellően nagy jóságú tekercsnek a vezetése kicsi, vagyis az ellenállása nagy. Tehát egy párhuzamos RL-körnek a jósága annál nagyobb, minél kisebb a vezetése (így a veszteségi teljesítménye), illetve minél nagyobb az induktív szuszceptancia és a vezetés aránya. A tekercs szuszceptanciája frekvenciafüggő $B_L = \frac{1}{\omega \cdot L}$, a frekvencia csökkenésével.

A valóságos tekercs jósága tehát: $\boxed{Q = \frac{B_L}{G} = tg\,\phi}$.

A jóság frekvenciafüggősége: $Q = \frac{B_L}{G} = \frac{\frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{\omega \cdot L} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{R}{L} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\tau}$, ahol $\tau = \frac{L}{R}$ az időállandó.

Az ideális tekercsnek a vesztesége nulla, ez párhuzamos modellben azt jelenti, hogy a G vezetés, mint veszteségi komponens nulla értékű. A meredekség igazolja, hogy a veszteség nélküli (ideális) tekercs végtelen nagy jóságú:

$$Q = tg\,\phi = \frac{B_L}{G} = \lim_{G \Rightarrow 0} \frac{B_L}{G} = B_L \cdot \lim_{G \Rightarrow 0} \frac{1}{G} = \infty$$

A fázorábrákat megfigyelve a következő azonosságokat tudjuk felírni: $Q = tg\,\phi = \frac{B_L}{G} = \frac{I_L}{I_R} = \frac{Q_L}{P}$,

vagyis a jóság a képzetes komponens és a veszteségi komponens hányadosa: $\left[\frac{\text{képzetes}}{\text{veszteségi}}\right]$.

A párhuzamos modell esetében is elmondhatjuk, hogy a valóságos tekercs ideálistól való eltérése lényegében attól függ, hogy a ϕ fáziseltolása mennyivel kisebb, mint 90^o. A veszteségi tényező itt is értelmezhető adat, értéke minél kisebb, a tekercsnek annál kisebb a vesztesége, vagyis annál kisebb a vezetése is.

A veszteségi tényező ekképp alakul: $tg\,\delta = \frac{G}{B_L} = \frac{X_L}{R}$.

Tehát a jósági tényező és a veszteség tényező fordított arányban van egymással: $Q = \frac{1}{tg\,\delta} = tg\,\phi$

A soros és a helyettesítő kép közötti ekvivalens átalakítás (rL => RL).

A két kapcsolás akkor egyenértékű, ha az induktivitásaik, az eredő impedanciájuk, valamint a fázisszögük azonos. Az L elemek azonossága miatt ez csak akkor teljesülhet, ha az ellenállások különbözőek. Ezt a jelölésben is kifejezzük: a soros kapcsolás veszteségi ellenállását kis betűvel (r), a párhuzamosét nagy betűvel (R) szokás jelölni. A két helyettesítő kapcsolás egymásba átszámítható. Kiindulhatunk a két kapcsolás fázistényezőjéből $(\cos\phi)$:

Soros kapcsolás esetén: $\cos\phi_{soros}=\frac{r}{Z}$, párhuzamos esetén pedig: $\cos\phi_{párh.}=\frac{G}{Y}$. Az egyenértékű kapcsolások esetén a fázisszögek megegyeznek, tehát $\cos\phi_{soros}=\cos\phi_{párh.}$, ezért $\frac{r}{Z}=\frac{G}{Y}$.

Kifejtve a vezetés-összetevőket:

$$\frac{r}{Z}=\frac{G}{Y}=\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{Z}}=\frac{Z}{R}\text{, vagyis } \frac{r}{Z}=\frac{Z}{R}.$$

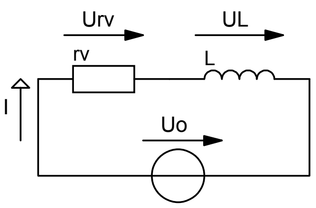
Ebből a soros => párhuzamos átalakítás: $r=\frac{Z^2}{R}$.

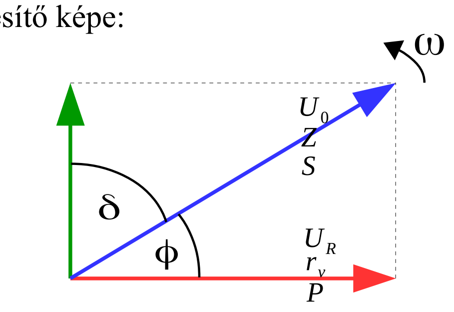
A párhuzamos => soros átalakítás pedig: $R=\frac{Z^2}{r}$.

A jósági tényező függ a frekvenciától:

$$Q=\frac{X_L}{r} \text{ és } Q=\frac{R}{X_L} \Rightarrow X_L=Q\cdot r \text{ és } X_L=\frac{R}{Q} \Rightarrow Q\cdot r=\frac{R}{Q} \Rightarrow r=\frac{R}{Q^2} \text{ és } R=Q^2\cdot r$$

A valóságos tekercs soros helyettesítő képe:



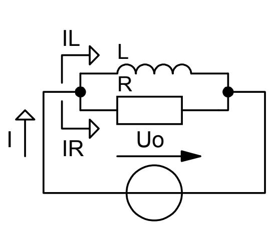


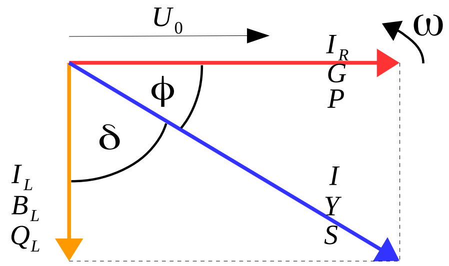
$$\boxed{Q=\frac{X_L}{r}=tg\,\phi}$$

$$tg\,\delta=\frac{r}{X_L}$$

$$Q=\frac{1}{tg\,\delta}=tg\,\phi$$

A valóságos tekercs párhuzamos helyettesítő képe:





$$\boxed{Q=\frac{B_L}{G}=tg\,\phi}$$

$$tg\,\delta=\frac{G}{B_L}=\frac{X_L}{R}$$

$$Q=\frac{1}{tg\,\delta}=tg\,\phi$$

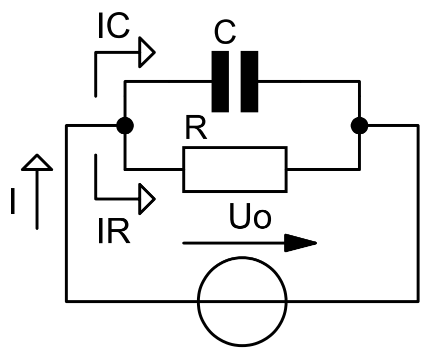
Soros => párhuzamos: $r=\frac{Z^2}{R}$ és $r=\frac{R}{Q^2}$. Párhuzamos => soros: $R=\frac{Z^2}{r}$ és $R=Q^2\cdot r$

A párhuzamos RC-modell vizsgálata

A valóságos kondenzátor modellezésére legalkalmasabb a párhuzamos helyettesítő kép. A kondenzátor két fegyverzete között a dielektrikum van, melynek nem tökéletes a szigetelése. Ennek következtében a feltöltött kondenzátorban a töltéskiegyenlítődés (kisülés) a dielektrikumon keresztül történik meg, ezt nevezzük a dielektrikum átvezetésének (mértéke a szigetelési ellenállással R_{sz} kifejezett). Ez a jelenség nem csak egyen-, hanem váltakozófeszültségen is megfigyelhető.

Váltakozó feszültséget kapcsolva a kondenzátorra (periodikusan váltakozó polaritás) a dipólusmolekulák a tehetetlenségük miatt nem tudnak a villamos tér váltakozó irányába megfelelő szaporasággal beállni, így a rendezetlen polarizáció miatt az úgynevezett polarizációs veszteség lép fel, melynek következménye a szigetelőanyag melegedése.

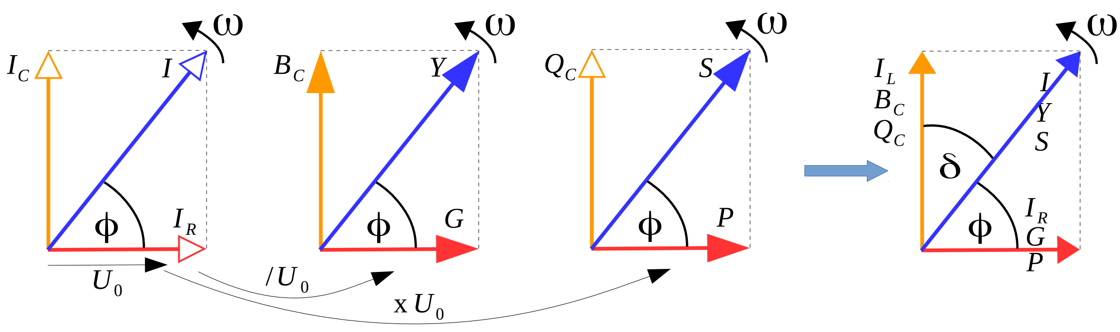
A fegyverzetek közötti átvezetés és a polarizációs veszteség együtt adja a kondenzátor veszteségét. Az így kapott eredő veszteséget párhuzamos veszteségi ellenállással modellezzük a valóságos kondenzátor helyettesítő képében.



6. ábra A veszteséges kondenzátor párhuzamos helyettesítő képe

Eddig ismereteinket összefoglalva elmondhatjuk, hogy annak a kondenzátornak nagyobb a jósága, amelyiknek kicsi az átvezetése, valamint a polarizációs vesztesége $(R => \infty;\ G => 0;\ I_R => 0)$.

Idézzük fel a párhuzamos RC-kör fázorábráit, melyekből könnyen megláthatjuk, hogy a jósági tényező a képzetes és a veszteségi komponens hányadosa, vagyis a meredekség, mint minden esetben).



6. ábra A párhuzamos RC-kapcsolás áram-, vezetés- és teljesítmény fázorábrái

A jósági tényező tehát: $\boxed{Q=\frac{B_C}{G}=tg\phi}$ => $Q=\frac{B_C}{G}=\frac{\frac{1}{X_C}}{\frac{1}{R}}=\frac{R}{X_L}=\frac{R}{\frac{1}{\omega\cdot C}}=\omega\cdot R\cdot C=\omega\tau$, ahol $\tau=R\cdot C$

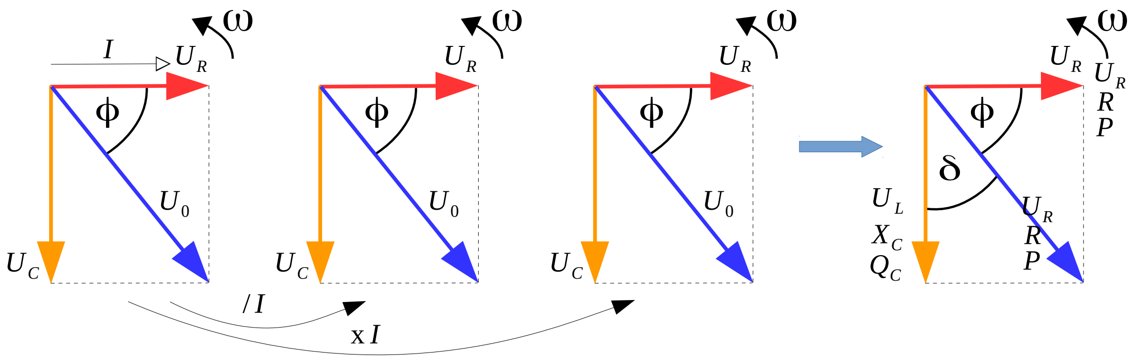
A veszteségi tényező és jósági tényező között fordított az arányosság: $Q=\frac{1}{tg\delta}=tg\phi$, ezért a veszteségi tényező: $tg\delta=\frac{1}{Q}=\frac{G}{B_C}=\frac{X_C}{R}$

Mivel az ideális kondenzátor vesztesége nulla (a vezetése nulla), így a jósági tényezőjének elvi értéke végtelen nagy:

$$Q = tg\,\phi = \frac{B_C}{G} = \lim_{G \Rightarrow 0} \frac{B_C}{G} = B_C \cdot \lim_{G \Rightarrow 0} \frac{1}{G} = \infty$$

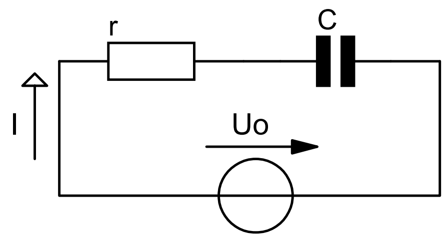
A soros rC-modell vizsgálata

A valóságos kondenzátor modellezésére a párhuzamos helyettesítő kép mellett a soros kép is alkalmazható, a két kép átalakítható egymásba.



7. ábra A soros rC-kör fázorábrái és az abból származtatott rC-kör fázorábrái

A soros helyettesítő képet, valamint a fázorábrákat megfigyelve láthatjuk, hogy kondenzátor jósága a veszteségi komponens nagyságától is függ. Minél kisebb a veszteségi komponens (r) értéke, annál nagyobb a kondenzátor jósági tényezője és annál kisebb a veszteségi tényezője $(r \Rightarrow 0;\; U_R \Rightarrow 0)$.



8. ábra A soros rC helyettesítő kép

A jósági tényező: $\boxed{Q = \frac{X_C}{r} = tg\,\phi}$ => $Q = \frac{X_C}{r} = \frac{\frac{1}{\omega \cdot C}}{r} = \frac{1}{\omega \cdot r \cdot C} = \frac{1}{\omega \cdot \tau}$, ahol $\tau = r \cdot C$

A veszteségi tényező és jósági tényező között fordított az arányosság: $Q = \frac{1}{tg\,\delta} = tg\,\phi$, ezért a veszteségi tényező: $tg\,\delta = \frac{1}{Q} = \frac{r}{X_C}$

A soros RC-kapcsolás esetén is elvégezhető annak a vizsgálata, hogy a veszteségmentes (ideális) kondenzátornak miként alakul a jósági tényezője: $Q = tg\,\phi = \frac{X_C}{r} = \lim_{r \Rightarrow 0} \frac{X_C}{r} = X_C \cdot \lim_{r \Rightarrow 0} \frac{1}{r} = \infty$

A soros és a helyettesítő kép közötti ekvivalens átalakítás (RC => rC).

A valóságos kondenzátor esetében is elvegezhető az egyenértékű átalakítás a soros és a párhuzamos kapcsolás között. Így az átváltás menete is megegyezik. A fázistényezőkből kiindulva:

$$\cos\phi_{\text{párh.}} = \frac{G}{Y} \text{ és } \cos\phi_{\text{soros}} = \frac{r}{Z} \quad \Rightarrow \quad \cos\phi_{\text{soros}} = \cos\phi_{\text{párh.}}, \quad \text{ezért} \quad \frac{r}{Z} = \frac{G}{Y}.$$

Kifejtve a vezetés-összetevőket:

$$\frac{r}{Z}=\frac{G}{Y}=\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{Z}}=\frac{Z}{R}\text{, vagyis }\frac{r}{Z}=\frac{Z}{R}\text{ .}$$

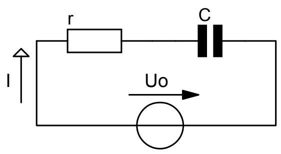
Ebből a soros => párhuzamos átalakítás: $r=\frac{Z^2}{R}$.

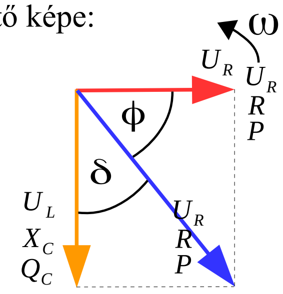
A párhuzamos => soros átalakítás pedig: $R=\frac{Z^2}{r}$.

A jósági tényező függ a frekvenciától:

$$Q=\frac{X_C}{r}\text{ és }Q=\frac{R}{X_C}\;=>\;X_C=Q\cdot r\text{ és }X_C=\frac{R}{Q}\;=>\;Q\cdot r=\frac{R}{Q}\;=>\;r=\frac{R}{Q^2}\text{ és }R=Q^2\cdot r$$

A valóságos kondenzátor soros helyettesítő képe:



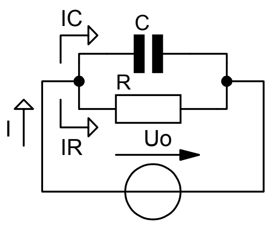


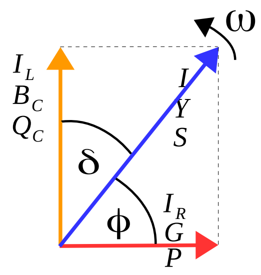
$$\boxed{Q=\frac{X_C}{r}=tg\,\phi}$$

$$tg\,\delta=\frac{r}{X_C}$$

$$Q=\frac{1}{tg\,\delta}=tg\,\phi$$

A valóságos kondenzátor párhuzamos helyettesítő képe:





$$\boxed{Q=\frac{B_C}{G}=tg\,\phi}$$

$$tg\,\delta=\frac{G}{B_C}=\frac{X_L}{R}$$

$$Q=\frac{1}{tg\,\delta}=tg\,\phi$$

Soros => párhuzamos: $r=\frac{Z^2}{R}$ és $r=\frac{R}{Q^2}$. Párhuzamos => soros: $R=\frac{Z^2}{r}$ és $R=Q^2\cdot r$

Feladatok

1. példa: veszteséges tekercs jóságának és veszteségi tényezőjének megállapítása

Adatok: $L=100\,mH$, $r=10\,\Omega$, $f=50\,Hz$

Megoldás:

A tekercs reaktanciája (látszólagos ellenállása, induktanciája):

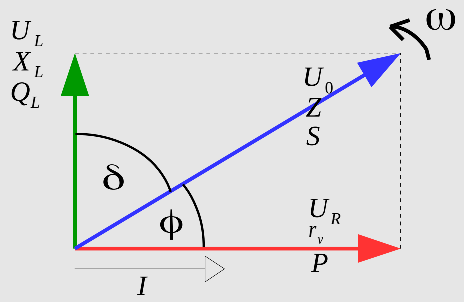
$$X_L=\omega\cdot L=2\cdot\pi\cdot f\cdot L=2\cdot\pi\cdot 50\,Hz\cdot 100\,mH=2\cdot\pi\cdot 50\frac{1}{s}\cdot 100\cdot 10^{-3}\frac{Vs}{A}=10\cdot\pi\,\Omega=31{,}42\,\Omega$$

A jóság: $Q=\frac{X_L}{r}=\frac{\omega\cdot L}{r}=\frac{31{,}42\,\Omega}{10\,\Omega}=\pi=3{,}14$

A fázisszög: $Q=tg\,\phi$ => $\phi=arc\,tg\frac{X_L}{r}=arc\,tg\,\pi=72{,}34^o$

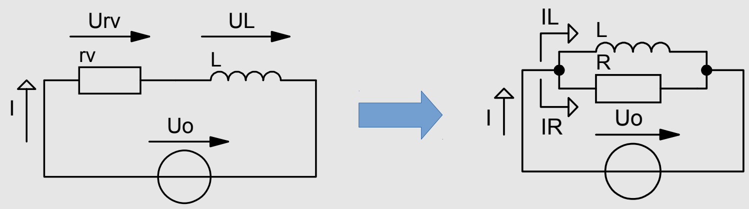
A veszteségi tényező: $tg\,\delta=\frac{r}{X_L}=\frac{1}{Q}=\frac{1}{\pi}=0{,}318$

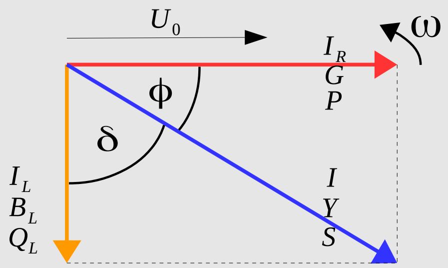
A veszteségi szög: $\delta=arc\,tg\frac{r}{X_L}=arc\,tg\frac{1}{\pi}=17{,}66^o$



2. példa: az előző példa szerinti soros helyettesítő képű kapcsolást alakítsa át párhuzamos kapcsolássá!

Megoldás: A párhuzamos veszteségi ellenállás: $R=Q^2\cdot r=\pi^2\cdot 10\,\Omega=9{,}87\cdot 10\,\Omega=98{,}7\,\Omega$





1. példa: veszteséges kondenzátor jóságának és veszteségi tényezőjének megállapítása

Adatok: $C=1\mu F$, $R=1\,k\Omega$, $f=1\,kHz$

Megoldás:

A kondenzátor szuszceptanciája (látszólagos vezetése):

$$B_C=\omega\cdot C=2\cdot\pi\cdot f\cdot C=2\cdot\pi\cdot 1\,kHz\cdot 1\,\mu F=2\cdot\pi\cdot 10^3\frac{1}{s}\cdot 10^{-6}\frac{As}{V}=2\cdot\pi\cdot 10^{-3}\frac{A}{V}=6{,}28\,mS$$

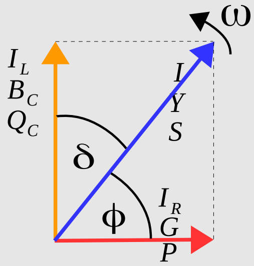
$$G=\frac{1}{R}=\frac{1}{1\,k\Omega}=1\,mS$$

A jóság: $Q=\dfrac{B_C}{G}=\dfrac{\omega\cdot C}{G}=\dfrac{6{,}28\,mS}{1\,mS}=6{,}28$

A fázisszög: $Q=tg\,\phi$ => $\phi=arc\,tg\,\dfrac{B_C}{G}=arc\,tg\,6{,}28=80{,}95^o$

A veszteségi tényező: $tg\,\delta=\dfrac{G}{B_C}=\dfrac{1}{Q}=\dfrac{1}{6{,}28}=0{,}159$

A veszteségi szög: $\delta=arc\,tg\,\dfrac{G}{B_C}=arc\,tg\,\dfrac{1}{6{,}28}=9{,}05^o$



2. példa: az előző példa szerinti párhuzamos helyettesítő képű kapcsolást alakítsa át soros kapcsolássá!

Megoldás: A soros veszteségi ellenállás: $r=\dfrac{R}{Q^2}=\dfrac{1000\,\Omega}{6{,}28^2}=\dfrac{1000\,\Omega}{39{,}47}=25{,}33\,\Omega$