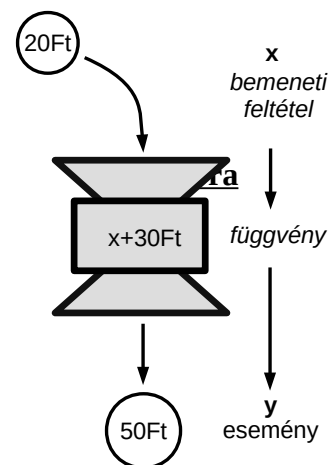


4. LOGIKAI ALGEBRA

4.1. Alapok

Már a korai általános iskolai tanulmányaink során megtapasztalhattuk, hogy életünk függvények sorozatából áll. Talán emlékszik is az Olvasó: *A gépbe bedobunk egy számot, a gép hozzáad 30-at és alul kiesik az összeadás eredménye, vagyis az összeg.* A bedobott szám a független változó, hiszen értéke nem függ semmitől (jelen esetben), a gép maga a függvénykapcsolat. A függő változó, vagyis a függvényérték pedig a gépből kiesett szám. Az így kapott függvény(ek) egyváltozósak. Későbbi tanulmányaink folyamán már nem csak egy-, hanem két-, illetve többváltozós függvények is sűrűn előfordultak. A logikai algebrában a bemeneti feltételekre úgy tekinthetünk, mint független változókra. Az értékek azon halmaza, melyeket a független változó felvehet, értelmezési tartománynak nevezzük. A bemeneti feltételek és a függvény által létrehozott „válasz” lényegében a független változó (függvényérték), másként fogalmazva a bekövetkező esemény. Az esemény szó helyett az állítás, az ítélet és a kijelentés szavak is használatosak.

- bemeneti feltétel = független változó
- esemény = függvényérték



A logikai algebra zömmel a többváltozós típusokkal foglalkozik. A hagyományos algebrához hasonlóan állandókat és változókat alkalmaz, ám ellentétben azzal, csak diszkrét értékűeket. A két állandó a **0** és az **1**. Csak ezeket az értékeket vehetik fel. A logikai változók (a bemeneti feltételek és az események) lehetnek igazak, vagy hamisak, attól függően, hogy adottak-e, illetve bekövetkeznek-e, vagy sem. Ha a bemeneti feltételek, illetve az események adottak, akkor logikai értékük **igaz**, ami jelölhető „1”-gyel, „H” betűvel (mint high), ha nem adottak, akkor **hamis** az értékük, melyet jelölhetünk „0”-val, illetve „L” betűvel (mint low). Látni fogjuk, hogy a **0** és az **1** a logikai algebrában nem számjegyek, hanem csak célszerű szimbólumai a hamis, illetve az igaz állapotoknak.

A bemeneti feltétel	adott	„igen”	„igaz”	„true”	„van”	„1”	H (magas)
	nem adott	„nem”	„hamis”	„false”	„nincs”	„0”	L (alacsony)

4.1. táblázat

Az esemény	bekövetkezik	„igen”	„igaz”	„true”	„van”	„1”	H (magas)
	nem következik be	„nem”	„hamis”	„false”	„nincs”	„0”	L (alacsony)

4.2. táblázat

A logikai hamis és igaz állapotoknak sokféle (villamos) reprezentációja létezik. pl.:

	hamis	igaz
fémek közegű jelátvitel	0V	5V
optikai adatátvitel	nincs fényimpulzus	van fényimpulzus
rádiófrekvenciás átvitel	nincs kisugárzott jel	van kisugárzott jel

4.3. táblázat

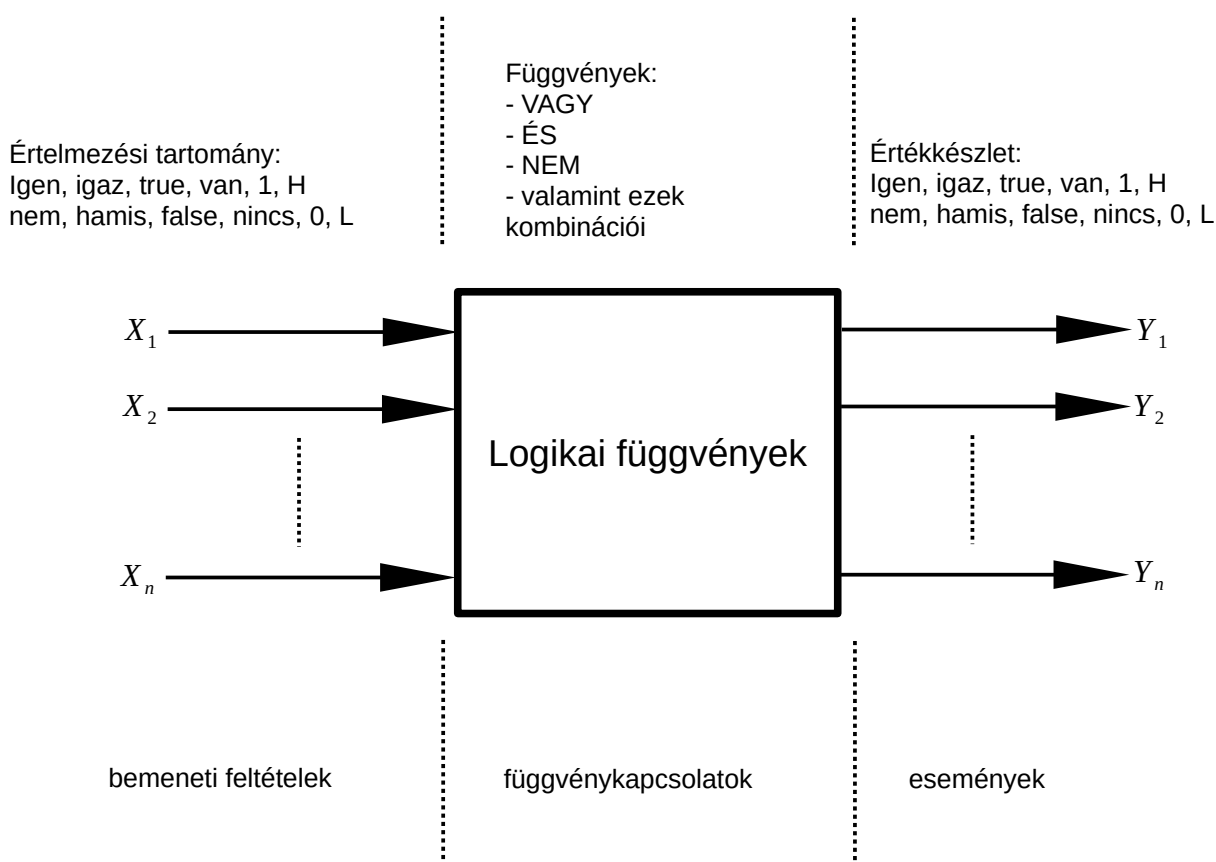
A bemeneti feltételek és az események közötti kapcsolatok matematikai formában logikai függvényekkel írhatók le, vagyis azok nem függetlenek egymástól, hanem közöttük a függvény által rögzített kapcsolat áll fenn.

A logikai változókkal (bemeneti feltételekkel) a függvény által meghatározott módon elvégezve a művelet(eket) kaphatjuk meg a függvényértéket, amely lényegében a folyamatból származó új változó. Az események bekövetkezése elsősorban tehát a bemeneti feltételektől függ, másodsorban pedig a köztük lévő kapcsolatokról.

Ez utóbbiakat logikai, más néven Boole-függvényeknek nevezzük. Léteznek alapfüggvények (VAGY, ÉS, NEM), valamint az alapfüggvényekkel megvalósított származtatott függvények.

A logikai alpműveletek (függvények) ismeretében számtalan további függvénykapcsolat hozható létre, azok megfelelő kombinációjában. A műszaki feladatok megvalósítása érdekében állított felvetéseket logikai függvénykapcsolatokká kell alakítani. Az így kapott függvényeket olyan alakra hozzuk, melyek – amellet, hogy teljesítik az eredeti feladatokat – logikai elemekkel történő realizálása a lehető leggazdaságosabb. A realizálást logikai áramkörökkel teljesíthetjük. Az ilyen áramköröknek egy, vagy több bemenete van (a bemeneti változók számától függően), valamint egy, vagy több kimenete. Több kimenet akkor lehetséges, ha több megvalósított függvényre van igény.

A változók számával exponenciálisan nő a műveleti variációk száma, mely a 2^n képlettel számítható, ahol 2 a kettes számrendszer alapja, az n pedig a változók számát jelöli.



4.2. ábra

A logikai függvénykapcsolatok megértéséhez hétköznapi példákon keresztül célszerű az elemzéseket elvégezni. Adott bemeneti feltételek és a függvény megléte mellett megvizsgálható, hogy az adott esemény bekövetkezik-e, vagy sem.

1. példa (a bemeneti változók közötti ÉS kapcsolatot):

Megéheztem.

Ha „VAN” itthon vaj „ÉS” „VAN” itthon kenyér, akkor „ESZEM” vajas kenyeret.

A fent ismertetett szövegből egyértelműen kiderül, hogy melyek a feltételek (jelen esetben kettő van), mi a függvény és mi az esemény:

„A” feltétel (független változó)	„B” feltétel (független változó)	Esemény (függvényérték)
<u>vaj</u>	<u>kenyér</u>	<u>vajas kenyér</u>

4.4. táblázat

Két független változó van tehát. Mivel a két független változó között „ÉS” függvénykapcsolatot állítottunk, csak abban az esetben lesz „igaz” a függvényérték, ha az egyik „ÉS” a másik feltétel is „igaz”. Lefordítva a hétköznapi nyelvre: csak akkor ehetek vajas kenyeret, ha a vaj és a kenyér is rendelkezésre áll. Szomorú, de más variáció esetén éhes maradok. Vagyis, ha bármelyik komponens hiányzik („hamis” értékű), a függvényérték hamis lesz, az esemény nem következik be. Azt, hogy milyen variációkban fordulhatnak elő a független változók, a változók száma dönti el.

A variációk száma= $2^n = 2^2 = 4$, ahol az n a változók száma. Nézzük táblázatban:

„A” feltétel (független változó)	„B” feltétel (független változó)	esemény (Y) (függvényérték) teljesül?
<u>vaj</u>	<u>kenyér</u>	<u>vajas kenyér</u>
nincs	nincs	nem
nincs	van	nem
van	nincs	nem
van	van	igen

4.5. táblázat

A	B	Y A ÉS B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

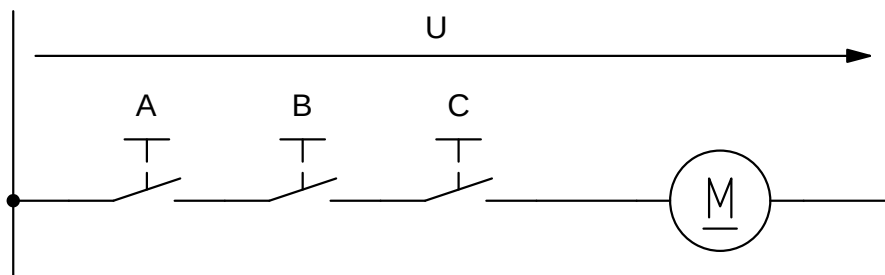
4.6. táblázat

A feltétel meglétét, illetve az esemény bekövetkezését 1-gyel jelöljük, a feltétel hiányát, illetve az esemény be nem következését pedig 0-val. Figyeljük meg a x. táblázatot! Látszik, hogy az esemény csak akkor teljesül, ha mind a két bemeneti feltétel adott.

Természetesen nem csak két változóra tudjuk elvégezni az „ÉS” műveletet, hanem tetszőleges számúra. Csak az alkalmazási igény szab határt a bemeneti feltételek számának.

2. példa (3 bemeneti változó közötti ÉS kapcsolat):

Egy vágógép kezelője balesetnek van kitéve annak működése közben, hiszen az az üzeme alatt sérülést okozhat. Ennek elkerülése érdekében a vágóél motorja csak akkor hozható működésbe, ha egyidejűleg a két kezével megnyom egy-egy nyomógombot (A és B), és a lábával egy pedált (C). Ha ugyanis a két keze és az egyik lába foglalt, akkor egyik végtagja sem kerülhet a vágóél alá. A nyomógombok és a lábpedál lényegében munkaérintkezős kapcsolók (nyomásra záródó áramkörűek). A vezérlő-kapcsolás áramutas rajza az 4.3. ábrán látható.

**4.3. ábra**

Lévé, hogy három változó van, nyolc variációja adódik a változóknak: $2^3=8$. Mondani sem kell, a kapcsolók elengedett állapota, valamint a be nem következett esemény a **0**, a működtetett kapcsolók állapota, valamint a bekövetkezett esemény az **1** érték. Az áramutas rajzból, de a feltételek vizsgálatakor is megállapíthatjuk, hogy csak akkor következik be az esemény (a vágóél motorjának üzeme), ha mind a három feltétel teljesül, vagyis mind a három kapcsoló zárt állapotú. Minden más esetben az áramút megszakad, megvédve ezzel a gép kezelőjét. Nézzük az állapotokat, táblázatba foglalva!

„A” kapcsoló megnyomva?	„B” kapcsoló megnyomva?	„C” kapcsoló megnyomva?	esemény (Y) motor üzemel?
nem	nem	nem	nem
nem	nem	igen	nem
nem	igen	nem	nem
nem	igen	igen	nem
igen	nem	nem	nem
igen	nem	igen	nem
igen	igen	nem	nem
igen	igen	igen	igen

4.7. táblázat

A	B	C	Y A ÉS B ÉS C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

4.8. táblázat

3. példa (a NEM kapcsolat):

Az ÉS kapcsolatot kiegészítjük egy új függvénnyel.

Ha meleg idő van és borult az égbolt, akkor napozhatunk.

„A” feltétel (független változó)	„B” feltétel (független változó)	Esemény (függvényérték)
<u>meleg idő</u>	<u>borult az égbolt</u>	<u>napozás</u>

4.9. táblázat

Vegyük észre, hogy itt ellentmondás van! A „B” feltétel (borult égbolt), valamint az esemény (a napozás) bekövetkezettségének feltétele (a napos idő) egymásnak ellentmondanak (borult idő <> napos idő), vagyis közöttük NEM kapcsolat van. Ebből kifolyólag csak akkor következik be az esemény, ha meleg idő van és NEM borult az idő, vagyis a „B” feltételt ellentétesen kell ábrázolni. Csak akkor következik be az esemény, ha meleg van és NEM borult az égbolt.

„A” feltétel (független változó)	„B” feltétel (független változó)	„B” feltétel ellentettje	esemény (F) (függvényérték) teljesül?
<u>meleg idő</u>	<u>borult égbolt</u>	<u>NEM borult az égbolt</u> (hanem napos)	<u>napozás</u>
nem	nem	igen	nem
nem	igen	nem	nem
igen	nem	igen	nem
igen	igen	nem	igen

4.10. táblázat

A	B	NEM B	F (A) ÉS (NEM B)
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

4.11. táblázat**4. példa (a VAGY kapcsolat):**

Ha „VAN” itthon szék „VAGY” „VAN” itthon fotel, akkor „LEÜLHETEK kényelmesen.

„A” feltétel (független változó)	„B” feltétel (független változó)	esemény (Y) (függvényérték) teljesül?
<u>szék</u>	<u>fotel</u>	<u>leülhetnek</u>
nincs	nincs	nem
nincs	van	igen
van	nincs	igen
van	van	igen

4.12. táblázat

A	B	F A VAGY B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4.13. táblázat

A VAGY kapcsolat megengedőbb, mint az ÉS. Az esemény bekövetkezik, ha legalább egy feltétel teljesül.

4.2. Egyváltozós logikai függvények

Egy függvény akkor egyváltozós, ha a kimeneti esemény egyetlen bemeneti változótól függ. Az 4.15. táblázatban látható, hogy az A bemeneti független változó értékétől függően az Y függvényérték milyen értékeket vehet fel. Ez az egyváltozós függvények igazságtáblázata. A független változók valamennyi lehetséges kombinációja esetén tartalmazza a függvény által meghatározott kimeneti eseményt.

A logikai függvények jelölésében a felső index a bemeneti változók számát, az alsó index a függvény sorszámát adja meg. Ezt a decimális sorszámot a függvény értékeiből alkotott bináris számból kapjuk meg. Egy független változó esetén a különböző logikai függvények száma:

$$N = (2^2)^n = (2^2)^1 = 2^2 = 4$$

Y_0^1	Soha függvény: $Y_0^2 = 0$, a függvényérték mindig 0 értékű (0-tautológia) ¹
Y_1^1	Ismétlés függvény: $Y_1^2 = A$
Y_2^1	NEM (NOT) függvény: negáció, $Y_2^2 = \bar{A}$, bitforgatás, tagadás, a függvényérték mindig a független változó ellentétes értékét veszi fel
Y_3^1	Mindig függvény: $Y_3^2 = 1$, a függvényérték mindig 1 értékű (1-tautológia)

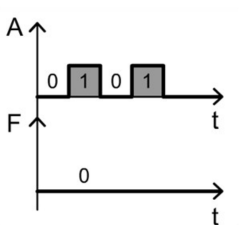
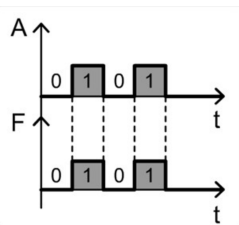
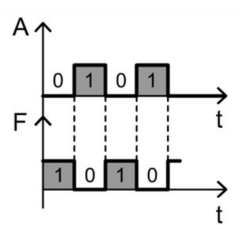
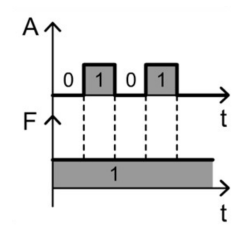
4.14. táblázat

A	Y_0^1	Y_1^1	Y_2^1	Y_3^1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

4.15. táblázat

Az egyváltozós függvények közül a negációt és az ismétlő függvényt alkalmazzuk a leggyakrabban.

A logikai események idődiagramon is bemutatathatók. Ennél a módszernél a kétértékű eseményeket (a bemeneteket és a kimeneteket is) az idő függvényében ábrázoljuk, így az események időbeli lefolyása is követhető. Előnye, hogy az idődiagramon tetszőleges számú változót ábrázolhatunk.

Függvénynév	Soha	Ismétlés	Negáció	Mindig
A függvény idődiagramja				

4.16. táblázat

¹ A *tautológia* jelentése: a külső tényekre való tekintet nélkül igaz. Látható, hogy ez az állítás csak a „Mindig” függvény esetében érvényes (1-tautológia), hiszen a 0-tautológia lényegében az *ellentmondás*. Ennek ellenére használatos fogalom a 0-tautológia, valamint az 1-tautológia is.

4.3. Kétváltozós logikai függvények

Két független változó esetén a különböző logikai függvények száma: $N = (2^2)^n = (2^2)^2 = 2^4 = 16$

Y_0^2	Soha függvény: $Y_0^2 = 0$, 0-tautológia, a függvényérték mindig 0 értékű, 0-generátornak is nevezik.
Y_1^2	ÉS (AND) függvény: $Y_1^2 = A \cdot B$, a függvényérték akkor 1 értékű, ha mindkét független változó egyidejűleg 1.
Y_2^2	Inhibitáló függvény: $Y_2^2 = A \cdot \bar{B}$
Y_3^2	Ismétlés függvény: $Y_3^2 = A$
Y_4^2	Inhibitáló függvény: $Y_4^2 = \bar{A} \cdot B$
Y_5^2	Ismétlés függvény: $Y_5^2 = B$
Y_6^2	KIZÁRÓ VAGY (XOR) függvény: antivalencia, $Y_6^2 = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} = A \oplus B$
Y_7^2	VAGY (OR) függvény: $Y_7^2 = A + B$, a függvényérték akkor egy értékű, ha legalább egy független változó 1 értékű
Y_8^2	NEM-VAGY (NOR) függvény: $Y_8^2 = \overline{A + B}$, a függvényérték csak akkor 1 értékű, ha mindkét független változó 0 értékű
Y_9^2	KIZÁRÓ NEM-VAGY (XNOR) függvény: ekvivalencia, $Y_9^2 = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} = A \odot B$, a függvényérték akkor 1, ha a független változók értéke azonos
Y_{10}^2	NEM (NOT) függvény: negáció, $Y_{10}^2 = \bar{A}$, bitforgatás, tagadás, a függvényérték mindig a független változó ellentétes értékét veszi fel
Y_{11}^2	Implikáció (következik) függvény: $Y_{11}^2 = A + \bar{B}$
Y_{12}^2	NEM (NOT) függvény: negáció, $Y_{12}^2 = \bar{B}$
Y_{13}^2	Implikáció függvény: $Y_{13}^2 = \bar{A} + B$
Y_{14}^2	NEM-ÉS (NAND) függvény: $Y_{14}^2 = \overline{A \cdot B}$, a függvény akkor 0 értékű, ha mindkét független változó 1 értékű
Y_{15}^2	Mindig függvény: $Y_{15}^2 = 1$, a függvényérték mindig 1 értékű, 1-generátornak is hívják

4.17. táblázat

A	B	Y_0^2	Y_1^2 AND	Y_2^2	Y_3^2	Y_4^2	Y_5^2	Y_6^2 XOR	Y_7^2 OR	Y_8^2 NOR	Y_9^2 XNOR	Y_{10}^2 NOT	Y_{11}^2	Y_{12}^2	Y_{13}^2	Y_{14}^2 NAND	Y_{15}^2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

4.18. táblázat

Figyeljük meg a táblázatot! A 7-es és 8-as függvény közé húzott függőleges vonalra nézve negált függvénpárokat kapunk.

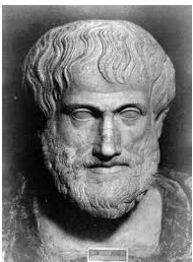
$F_0^2 = \overline{F_{15}^2}$: soha $\Leftrightarrow$ mindig	$F_4^2 = \overline{F_{11}^2}$: inhibitáló $\Leftrightarrow$ implikáció
$F_1^2 = \overline{F_{14}^2}$: AND $\Leftrightarrow$ NAND	$F_5^2 = \overline{F_{10}^2}$: ismétlés $\Leftrightarrow$ negáció
$F_2^2 = \overline{F_{13}^2}$: inhibitáló $\Leftrightarrow$ implikáció	$F_6^2 = \overline{F_9^2}$: XOR $\Leftrightarrow$ XNOR
$F_3^2 = \overline{F_{12}^2}$: ismétlés $\Leftrightarrow$ NOT	$F_7^2 = \overline{F_8^2}$: OR $\Leftrightarrow$ NOR

Többszámú logikai függvények

A gyakorlati példák megoldásakor többszámú (N) logikai függvények is előfordulnak. Az ilyen függvények a kétváltozós függvényekhez hasonlóan oldhatóak meg.

OR:	$Y = A + B + \dots + N$
AND:	$Y = A \cdot B \cdot \dots \cdot N$
NOR:	$Y = \overline{A + B + \dots + N}$
NAND:	$Y = \overline{A \cdot B \cdot \dots \cdot N}$
XOR:	$Y = A \oplus B \oplus \dots \oplus N$
XNOR:	$Y = \overline{A \oplus B \oplus \dots \oplus N}$

A témában jelentős személyek (forrás: Wikipédia)



A logika története az ókori filozófia nagy alakjától, Arisztotelésztől számítható (ie. 4. sz.), ám a matematika nyelvére George Boole (1815-1864) angol autodidakta matematikus fordította le a logikai törvényszerűségeket. Természetesen nem a logikai hálózatok leírására alkalmazta, hiszen azok az 1800-as években még nem léteztek.



Boole a róla elnevezett rendszer alapszabályait *A logika matematikai analízise* című munkájában ismertette 1847-ben. Művében taglalta, hogy a logikát nem a filozófiához, hanem a matematikához célszerű sorolni, noha annak filozófiai alkalmazhatósága is igazolt. Érdeklődése az absztrakt algebra, mint tudományág felé fordult, melynek alapjait Évariste Galois (1811-1832) teremtette meg, fiatal kora ellenére. Galois 20 évesen halt meg párbajban.



A digitális technika a Boole-algebra elemeit alkalmazza. Az így megalkotott kétértékű logika gyakorlati alkalmazásához kiválóan illeszkedik a bináris, vagyis a kettes számrendszer, melynek elemkészlete **0** és **1**. Claude Shannon (1916-2001) ismerte fel a Boole-algebra alkalmazhatóságának nagyszerűségét a bináris aritmetika, a logikai függvények leírása, a gazdaságosan kialakítandó hálózatok terén. Doktori értekezésében többek között ismertette, hogy miként lehet a Boole-algebra segítségével optimalizálni az elektromechanikus relés rendszerek tervezését, mindeközben bizonyítva azt, hogy ezekkel az áramkörökkel Boole-algebrai feladatokat is eredményesen meg lehet oldani.

