

6. A LOGIKAI ALGEBRA SZABÁLYAI

6.1. Alapszabályok

A logikai elv alapján működő vezérlőberendezések bonyolultságával (legyen az relés, logikai áramkörökkel, vagy pl. programozható logikai egységekkel felépített) összefügg a berendezések ára, így célszerűnek látszik az, hogy a szükséges logikai függvényt egyszerűsítsük, vagyis egyszerűbb alakra hozzuk. Az algebra szabályait a logikai algebrában is kiválóan alkalmazhatjuk. Ennek oka az, hogy az aritmetikai műveletekkel mutat hasonlatosságot két logikai művelet: Az ÉS függvény a szorzással, a VAGY függvény az összeadással.

Kommutatív szabály (felcserélhetőség)	Asszociatív szabály (társíthatóság, sorrendiség)	Disztributív szabály (szétválaszthatóság)
Az azonos logikai kapcsolatban levő független változók sorrendje tetszőleges, vagyis a független változók felcserélhetők: $A + B = B + A$ $A \cdot B = B \cdot A$	Az azonos logikai műveletek eredménye nem függ a műveletvégzés sorrendjétől: $(A + B) + C = (B + C) + A = (A + C) + B$ $(A \cdot B) \cdot C = (B \cdot C) \cdot A = (A \cdot C) \cdot B$	Az egyes tagokban van közös változó, melyet kiemelhetünk: $(A + B) \cdot (A + C) = A + (B \cdot C)$ $(A \cdot B) + (A \cdot C) = A \cdot (B + C)$

6.1. táblázat

6.2. Alaptételek

VAGY	A	B	A + B
1. sor	0	0	0
2. sor	0	1	1
3. sor	1	0	1
4. sor	1	1	1

$A + 0 = A$	=> 1. és 3. sor
$A + 1 = 1$	=> 2-4. sor
tautológia: $A + A = A$	=> 1. és 4. sor
negáció: $A + \bar{A} = 1$	=> 2. és 3. sor

ÉS	A	B	A · B
1. sor	0	0	0
2. sor	0	1	0
3. sor	1	0	0
4. sor	1	1	1

$A \cdot 0 = 0$	=> 1. és 3. sor
$A \cdot 1 = A$	=> 2-4. sor
tautológia: $A \cdot A = A$	=> 1. és 4. sor
negáció: $A \cdot \bar{A} = 0$	=> 2. és 3. sor

További azonosság: $A \cdot (A + B) = A \cdot A + A \cdot B = A + A \cdot B = A \cdot (1 + B) = A \cdot 1 = A$ => elnyelési szabály
 $A + A \cdot B = A \cdot A + A \cdot B = A + A \cdot B = A \cdot (1 + B) = A \cdot 1 = A$ => elnyelési szabály
 $A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$ => negált elnyelési szabály
 $A + (\bar{A} \cdot B) = A + B$ => negált elnyelési szabály
 $A \cdot B + \bar{A} \cdot B = B$
 $(A + B) \cdot (\bar{A} + B) = B$
 $A \cdot B + B \cdot C + \bar{A} \cdot C = A \cdot B + \bar{A} \cdot C$

$$(A+B) \cdot (\bar{A}+C) = A \cdot C + \bar{A} \cdot B$$

$$\bar{\bar{A}} = A \Rightarrow \text{kettős negáció}$$

6.3. De Morgan tételek	Negált változók...	Ponált változók...	
...OR kapcsolata	$\bar{A} + \bar{B}$	=	$\overline{A \cdot B}$...NAND kapcsolata
...AND kapcsolata	$\overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$	=	$\bar{A} + \bar{B}$...NOR kapcsolata
...NOR kapcsolata	$\overline{\bar{A} + \bar{B}}$	=	$A \cdot B$...AND kapcsolata
...NAND kapcsolata	$\overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$	=	$A + B$...OR kapcsolata

6.2. táblázat

A bizonyításhoz szükséges az igazságtáblázat (az azonos árnyalatú oszlopok megegyeznek):

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \cdot B$	$A + B$	$\bar{A} \cdot \bar{B}$	$\bar{A} + \bar{B}$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A + B}$	$\overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$	$\overline{\bar{A} + \bar{B}}$
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1

6.3. táblázat

A De Morgan azonosságok tetszőleges számú független változóra igazak:

$$\overline{A+B+C+\dots+N} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \dots \cdot \bar{N} \quad \text{és} \quad \overline{\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \dots \cdot \bar{N}} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \dots + \bar{N}$$

A De Morgan tétel, valamint a további logikai tétel és azonosság célja, hogy a logikai függvényeket egyszerűsítsük. Egyszerűsítésnek azt a folyamatot nevezzük, melynek során csökkentjük a függvényben szereplő változók számát és/vagy a logikai műveletek számát. Mindezzel együtt az alkalmazandó áramkör is egyszerűsödik, hiszen kevesebb áramköri elemet kell felhasználni. Ezt a fajta egyszerűsítést algebrai egyszerűsítésnek nevezzük. Hívják még a folyamatot intuitív módszernek is, hiszen intuitív készséget igényel.

Az intuitív elemzés magában hordozza a hibák és a nem a leoptimálisabb egyszerűsítés lehetőségét. Ezt különösen szem előtt kell tartanunk, hiszen például tömegtermelés esetén a legegyszerűbb alak megtalálása jelentős anyagi megtakarítást eredményezne, hiszen akkor a realizálandó áramkör jóval egyszerűbb. Létezik más, hatékonyabb egyszerűsítési eljárás is. Ilyen a grafikus, más néven a táblázatos módszer, melyhez szükséges a logikai függvények valamely általános felírási módja.

Minden logikai függvény felírható az úgynevezett normálalakban, Boole-függvényként, ahol csak az ÉS és a VAGY logikai alpművelet szerepel és a változók ponált, tehát állított (pl.: $A, B, C, \dots, N$), illetve negált, tehát tagadott (pl.: $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots, \bar{N}$) alakúak lehetnek (NEM).

Mint ismeretes, a Boole-algebra alpműveletei a negáció (NEM), a diszjunkció (VAGY) és a konjunkció (ÉS). Ama logikai függvényeket, melyek csak ezeket a műveleteket alkalmazzák, Boole-függvényeknek is nevezik.

6.4. Algebrai egyszerűsítések

Az alábbi feladatokban a logikai algebra alkalmazására láthatunk példákat.

1. feladat: Egyszerűsítse az alábbi háromváltozós függvényt!

$$Y^3 = A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + B \cdot C + B \cdot \bar{C}$$

A disztributív szabályt alkalmazhatjuk ($B \cdot C$ -t kiemelve): $Y^3 = B \cdot C \cdot (A + \bar{A}) + B \cdot (C + \bar{C})$

Látható, hogy $A + \bar{A} = 1$ és $C + \bar{C} = 1$, ezért:

$$Y^3 = B \cdot C + B$$

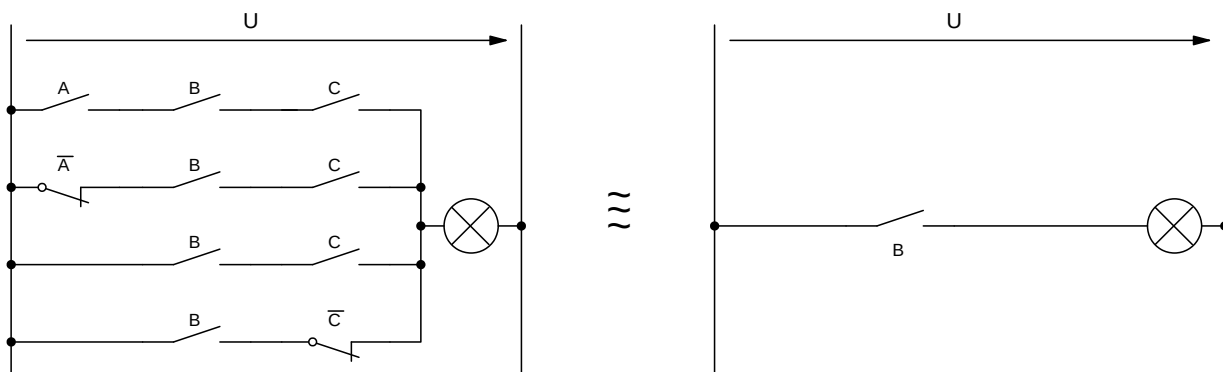
Ismét a disztributív szabályt alkalmazva (B -t kiemelve): $Y^3 = B \cdot (C + 1)$

$C + 1 = 1$, így:

$$Y^3 = B \cdot 1$$

Tehát:

$$Y^3 = B$$



6.1. ábra a logikai függvény kapcsolós (relés) realizációja az alapfüggvény ($Y^3 = B \cdot C \cdot (A + \bar{A}) + B \cdot (C + \bar{C})$) és az egyszerűsített függvény ($Y^3 = B$) alapján

Igazolásképpen készítsük el az igazságtáblázatot!

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{C}$	$A \cdot B \cdot C$	$\bar{A} \cdot B \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$	Y^3
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1

6.4. táblázat

2. feladat: Egyszerűsítsük a következő négyváltozós függvényt! $Y^3 = A \cdot C + A \cdot D + A \cdot \bar{C}$

A disztributív szabályt alkalmazhatjuk (A -t kiemelve):

$$Y^3 = A \cdot (C + \bar{C} + D)$$

Látható, hogy $C + \bar{C} = 1$, ezért:

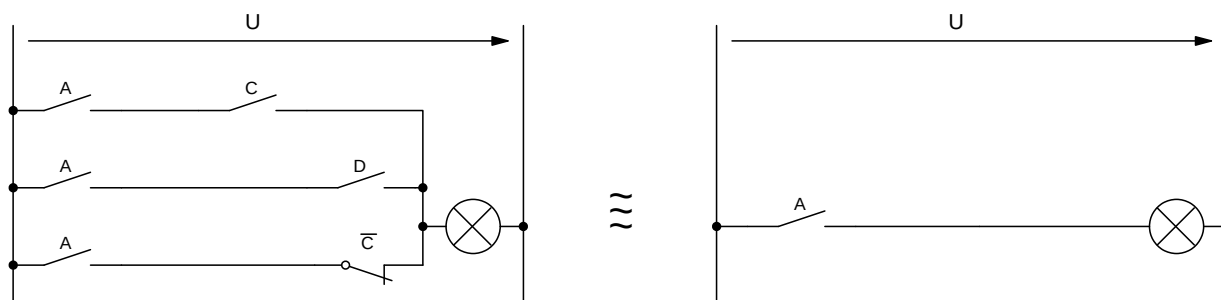
$$Y^3 = A \cdot (1 + D)$$

$1 + D = 1$, ezért

$$Y^3 = A + 1$$

$A + 1 = 1$, ezért:

$$Y^3 = A$$



6.2. ábra a logikai függvény kapcsolós (relés) realizációja az alapfüggvény és az egyszerűsített

$Y^3 = A \cdot C + A \cdot D + A \cdot \bar{C}$ függvény $Y^3 = A$ alapján

Igazolásképpen készítsük el az igazságtáblázatot!

A	B	C	D	$\bar{C}$	$\bar{D}$	$A \cdot C$	$A \cdot D$	$A \cdot \bar{C}$	Y^3
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

6.5. táblázat

6.5. A logikai kapcsolatok leírási módjai

Az ipari, de akár a hétköznapi feladataink leírására, megjelenítésére több lehetőségünk van. Ilyen a szöveges leírás, az algebrai alak, az igazságtáblázat, az áramutas rajz, a létradiagram, valamint a logikai vázlat.

Célszerű a legegyszerűbbel kezdeni, haladva az áramköri megoldásig. Nézzük ezt egy példát!

Szöveges leírás

Egy parkolóházban három nagy teljesítményű szellőztető van felszerelve. Szükség is van rá, hiszen az autók égésterméke problémás helyzetet tudna teremteni. Nevezzünk el minden egyes szellőztetőt, rendre az ábécé betűivel: A-nak, B-nek és C-nek. Ahhoz, hogy életvédelmi szempontból megfelelően üzemeltethető legyen a parkolóház, egy időben a háromból *legalább kettő* berendezésnek működnie kell. Minden egyes érzékelő egy kapcsolót működtet, mely a beléptetéshez szükséges áramköröket vezérli. A beléptető rendszer tehát csak akkor teszi lehetővé a behajtást, ha a megfelelő feltételek adottak. Az egyes logikai kapcsolatok megnevezése már a konkrét feladat megfogalmazásakor megtörténik. Nézzük tehát a feltételeket és az eseményt!

ha az A „ÉS” a B berendezés működik, „VAGY”

ha az A „ÉS” a C berendezés működik, „VAGY”

ha a B „ÉS” a C berendezés működik, akkor engedélyezett a behajtás

Algebrai alak

A szöveges leírásból elkészíthetjük a függvény algebrai alakját: $Y^3 = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$

Igazságtáblázat

Tekintettel arra, hogy három bemeneti feltétel van, így $N=2^3=8$ variációja adódhat a berendezések működésének:

„A” feltétel (független változó)	„B” feltétel (független változó)	„B” feltétel (független változó)	esemény (Y) (függvényérték) teljesül?
<u>1. berendezés üzeme</u>	<u>2. berendezés üzeme</u>	<u>3. berendezés üzeme</u>	<u>behajtási engedély</u>
nem	nem	nem	nem
nem	nem	igen	nem
nem	igen	nem	nem
nem	igen	igen	igen
igen	nem	nem	nem
igen	nem	igen	igen
igen	igen	nem	igen
igen	igen	igen	igen

6.6. táblázat

	A	B	C	Y
0.	0	0	0	0
1.	0	0	1	0
2.	0	1	0	0
3.	0	1	1	1
4.	1	0	0	0
5.	1	0	1	1
6.	1	1	0	1
7.	1	1	1	1

6.7. táblázat

Figyeljük meg, hogy az igazságtáblázatban négy eset felel meg az algebrai alakból felírva! A negyedik eset az, amikor mind a három berendezés működik. Ekkor az algebrai alak a következő lett:

$$Y^3 = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C + A \cdot B \cdot C$$

Állítható azonban, hogy eme alak egyszerűsítése után az eredeti alakot kapjuk. Tehát:

Emeljük ki $B \cdot C$ -t!

$$Y^3 = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C(1 + A)$$

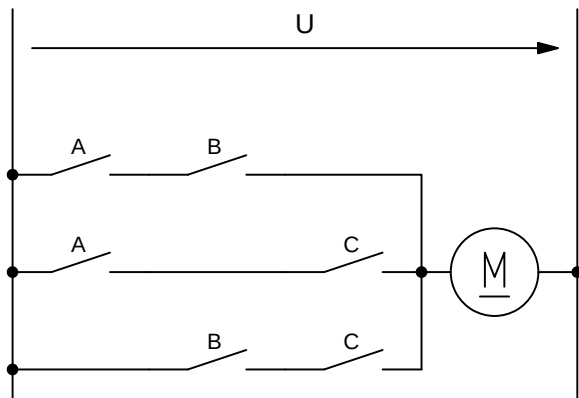
$1 + A = 1$, ezért:

$$Y^3 = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C \cdot 1$$

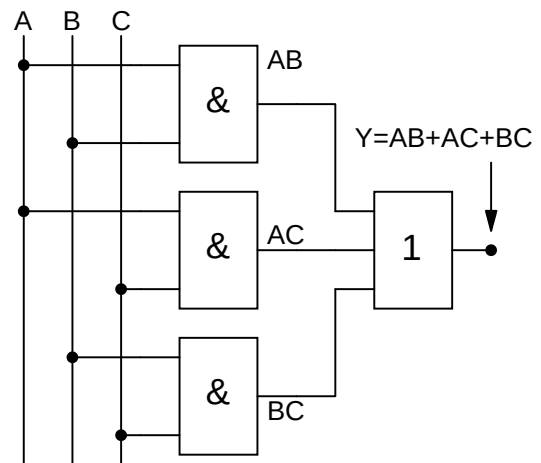
$C \cdot 1 = C$, így:

$$Y^3 = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C, \quad \text{mely tényleg az eredeti alak.}$$

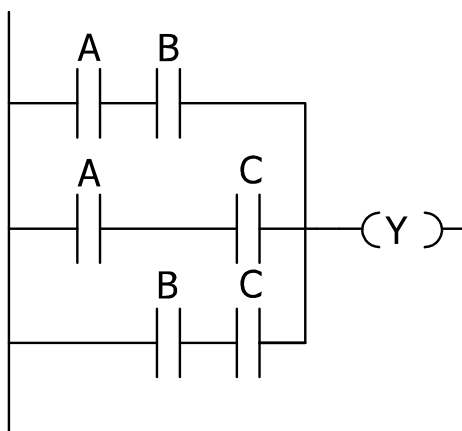
Grafikus ábrázolás



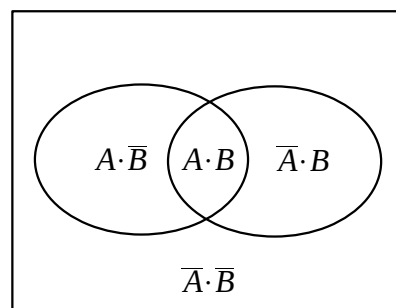
6.3. ábra Áramutas rajz (relés realizáció)



6.4. ábra Logikai vázlat



6.5. ábra Létra-diagram



6.6. ábra Venn-diagram

		A	
B		$A \cdot B$	$\bar{A} \cdot B$
		$A \cdot \bar{B}$	$\bar{A} \cdot \bar{B}$

6.7. ábra Veitch-diagram