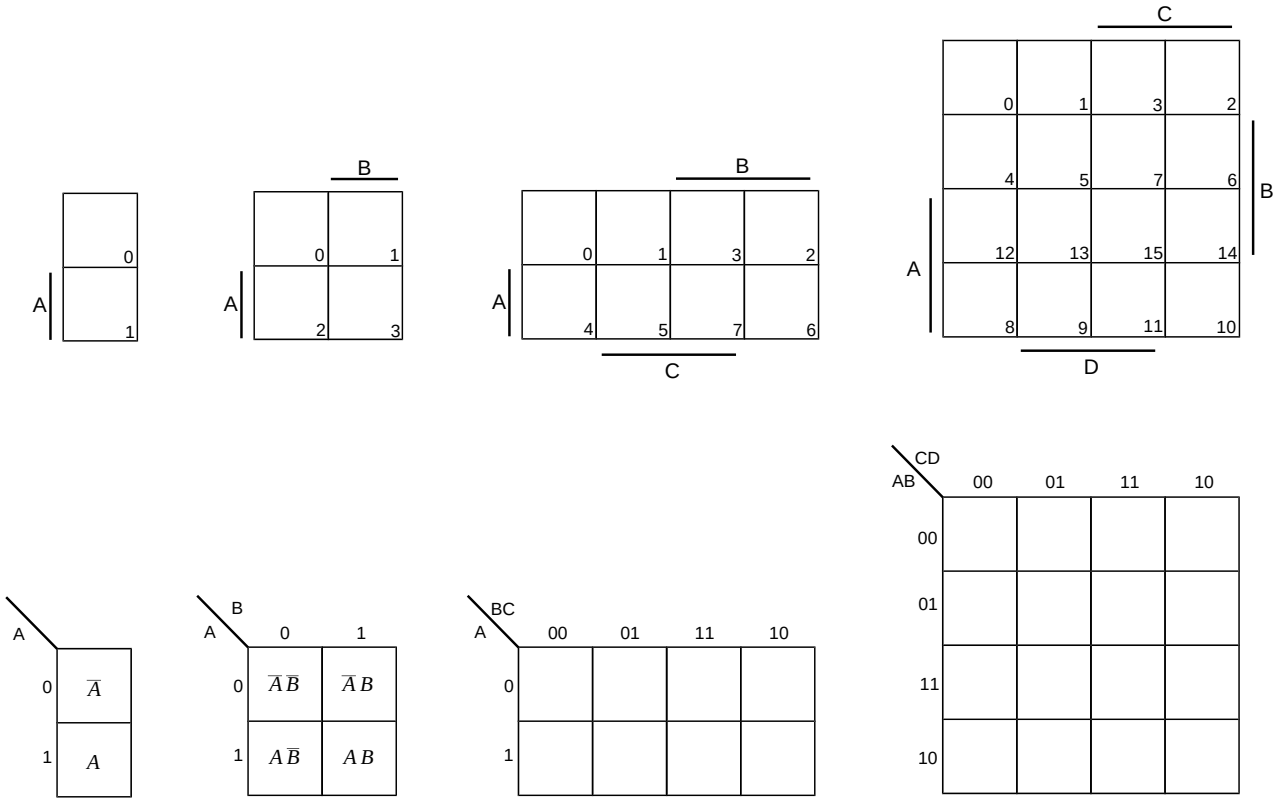
8. LOGIKAI FÜGGVÉNYEK GRAFIKUS EGYSZERŰSÍTÉSE

Korábban láthattuk, hogy algebrai úton kiválóan lehet logikai függvényeket egyszerűsíteni. Mindehhez elegendő ismerni a hagyományos algebrában ismert azonosságokat, valamint a Boole-tételeket. Ez egy intuitív, körülményes módszer, így magában hordozza a hiba lehetőségét. Ilyen lehet, ha nem rendelkezünk kellő rutinnal, ezért nem a legegyszerűbb alakot hozzuk létre, ez pedig drágább (tömeg)gyártási költségeket eredményez. Létezik ennél sokkal pontosabb, gyorsabb megoldás is, az úgynevezett grafikus módszer. Edward W. Veitch 1952-ben publikálta módszerét, mely a Veitch-diagram nevet kapta. Rá egy év múlva ismertette eljárását Maurice Karnaugh, a róla elnevezett Karnaugh-táblát. A diagramot (táblát) alkotó cellák számát a változók száma determinálja, melyet az ismert $N=2^n$ összefüggéssel határozhatjuk meg. Valamennyi egy szabályos termet reprezentál. Az igazságtáblázat sorait úgy írjuk fel, hogy egymástól csak egy változóban különböző termek kerüljenek a szomszédos – bármely irányban található – cellákba. Négy változónál több esetén már nehézkes a grafikus módszer, abban az esetben más módszer alkalmazása válik szükségessé. A Veitch-diagramok és a Karnaugh-táblák egyenértékűek.

8.1. Minterm táblák

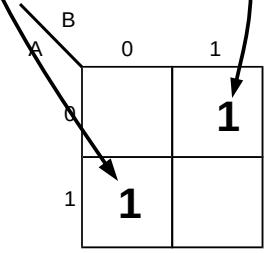
A diszjunktív normálalakú függvények táblázatos ábrázolására a minterm-táblák alkalmasak. Az egyváltozós függvények esetén 2, a kétváltozós esetén 4, a háromváltozós esetén 8, a négyváltozós esetén pedig 16 cella adódik, az $N=2^n$ szabálynak megfelelően.



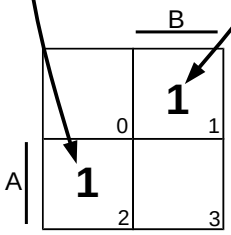
8.1. ábra Veitch-diagramok és Karnaugh-táblák. Minterm táblák

A Veitch-diagramban az egyes termekből képzett bináris szám decimális értékével adjuk meg a cellák sorszámát. A Karnaugh-táblában az adott termek algebrai alakjából képezzük a sorokat és oszlopokat. Az így képzett cellákba csak akkor írunk egyet, ha az adott term 1 értékű. Ezt láthatjuk egyébként az igazságtáblázatban is. Nézzük meg példában! Legyen a kétváltozós függvényünk $A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$.

Term	Bináris érték	Decimális érték (sorszám)
$A \cdot \overline{B}$	10	2
$\overline{A} \cdot B$	01	1



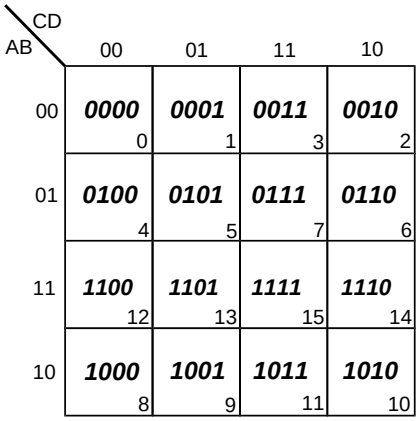
sorszám	term	A	B	F
0	$\overline{A} \cdot \overline{B}$	0	0	0
1	$\overline{A} \cdot B$	0	1	**1**
2	$A \cdot \overline{B}$	1	0	**1**
3	$A \cdot B$	1	1	0



8.1. ábra A kétváltozós Karnaugh-tábla és a Veitch-diagram „feltöltése”

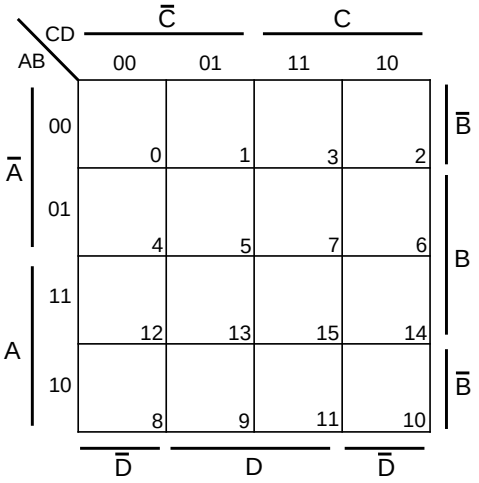
Az $A \cdot \overline{B}$ mintermből az „10” bináris szám képezhető. Az A értéke határozza meg a Karnaugh-tábla sorát, a B értéke pedig az oszlopát. „10”, tehát 1-es sor, 0-s oszlop által keresztezett cella értéke 1 (Karnaugh-tábla). Az $A \cdot \overline{B}$ minterm decimális értéke 2. Ezért a 2-es cella értéke 1 (Veitch-diagram). Az $\overline{A} \cdot B$ term értelmezése is ekképpen alakul.

ABCD	***ABCD***
0000 – 0	1000 – 8
0001 – 1	1001 – 9
0010 – 2	1010 – 10
0011 – 3	1011 – 11
0100 – 4	1100 – 12
0101 – 5	1101 – 13
0110 – 6	1110 – 14
0111 – 7	1111 – 15

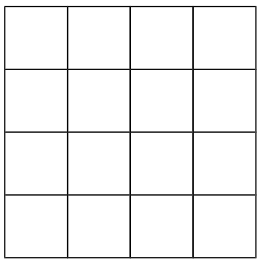


8.2. ábra A négyváltozós Veitch-diagram minterm-cellái

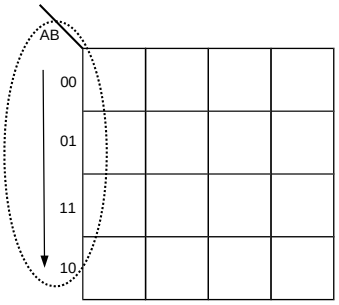
Unortodox módon, a vonatkozó szakirodalommal szembe menve – mely a Veitch-diagramokat részesíti előnyben –, célszerűnek tűnhet a Veitch-diagram és a Karnaugh-tábla egy táblába történő „összegyúrása”. Ez látható a 8.3. ábrán, négyváltozós függvény esetében.



8.3. ábra A négyváltozós Veitch-diagram és Karnaugh-tábla „összegyúrása”



a)



b)

A tábla elkészítésének menete:

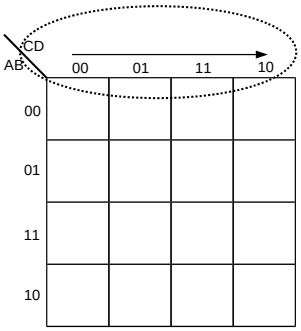
a) 4x4-es táblázat létrehozása;

b) Az algebrai alakból képzett bináris számok A és B változók értékeinek kombinációit – fentről le – írjuk fel sorindexnek, úgy, hogy a sorok váltása esetén csak egy bit változzon a kétbites alakban! Ekkor a sorrend AB -re:
   - 00, 01, 11, 10

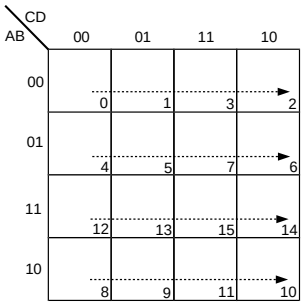
c) Hasonlóan, mint A és B változók esetén, végezzük el a műveletet a C és D változókra, balról jobbra!

d) A sor- és oszlopindexekből képezzük a négybites szám decimális értékét, majd írjuk fel a cellák jobb alsó sarkába.

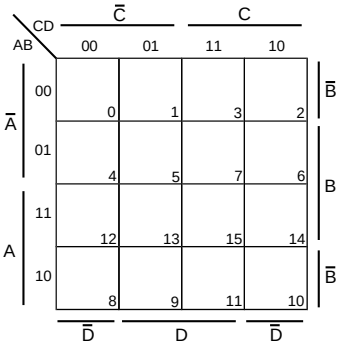
e) Vizsgáljuk meg, hogy az egyes változók hol veszik fel a ponált (1) és a negált (0) értéket! Jelöljük a sorok szélen, valamint az oszlopok alatt és felett egy vonallal, valamint az adott változó ponált és negált alakjával!



c)



d)



e)

8.4. ábra (a-e) V-K tábla készítése

A kapott tábla tartalmazza mindkét ábrázolás előnyeit:

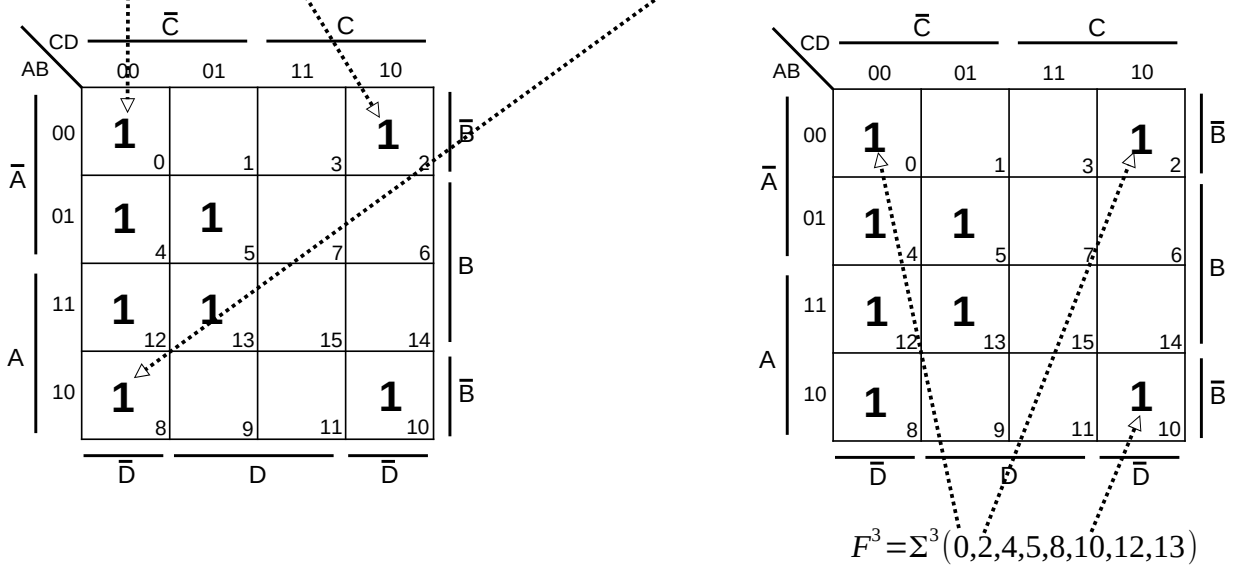
- a változókat;
- az algebrai alakot;
- a mintermek bináris értékéből képzett cellákat (sor – oszlopban megadva);
- a mintermek decimális értékéből képzett cellák sorszámát;
- a változók 1 és 0 értékének helyét => ponált és negált alak
  - vízszintes vonal és a változó ponált, illetve negált alakjának indikátora, pl.: $\overline{\overline{C}}$
  - függőleges vonal és a változó ponált, illetve negált alakjának indikátora. pl.: A
- Könnyen feltölthető táblázati forma, mind a sorszámos, mind pedig az algebrai alakból.

Feladat: Ábrázoljuk V-K-táblában az alábbi sorszámos, diszjunktív normálalakú logikai függvényt!

$$Y^3=\Sigma^3(0,2,4,5,8,10,12,13)$$

A függvény algebrai alakja:

$$Y^3=\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}}_{0}+\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}}_{2}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+\underbrace{A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}}_{8}+A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}+A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$$



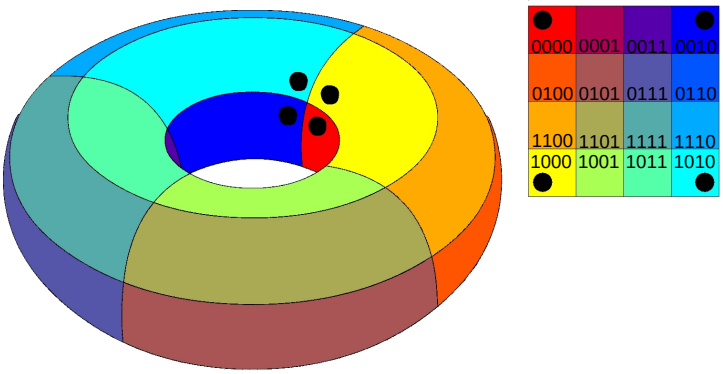
8.5. ábra A négyváltozós – példa szerinti – V-K-tábla „feltöltése” néhány mintermen bemutatva

Az 7.5. ábrán látható a feltöltés menetének egy része. Természetesen a feladat akkor teljes, ha valamennyi vonatkozó minterm celláját feltöltjük. Látható, hogy bármelyik alakból könnyedén feltölthető táblázat, miközben ugyanarra az eredményre jutunk, ezzel is igazolva a sorszámos és az algebrai alak azonosságát.

8.2. Az egyszerűsítés

Az egyszerűsítés során olyan szomszédos cellákból kell cellacsoportokat létrehozni, ahol a cellák 1-et tartalmaznak. Ez az úgynevezett tömbösítés. Tömbösíteni csak 1, 2, 4, 8, 16, stb. cellát lehet (kettő hatványai szerint).

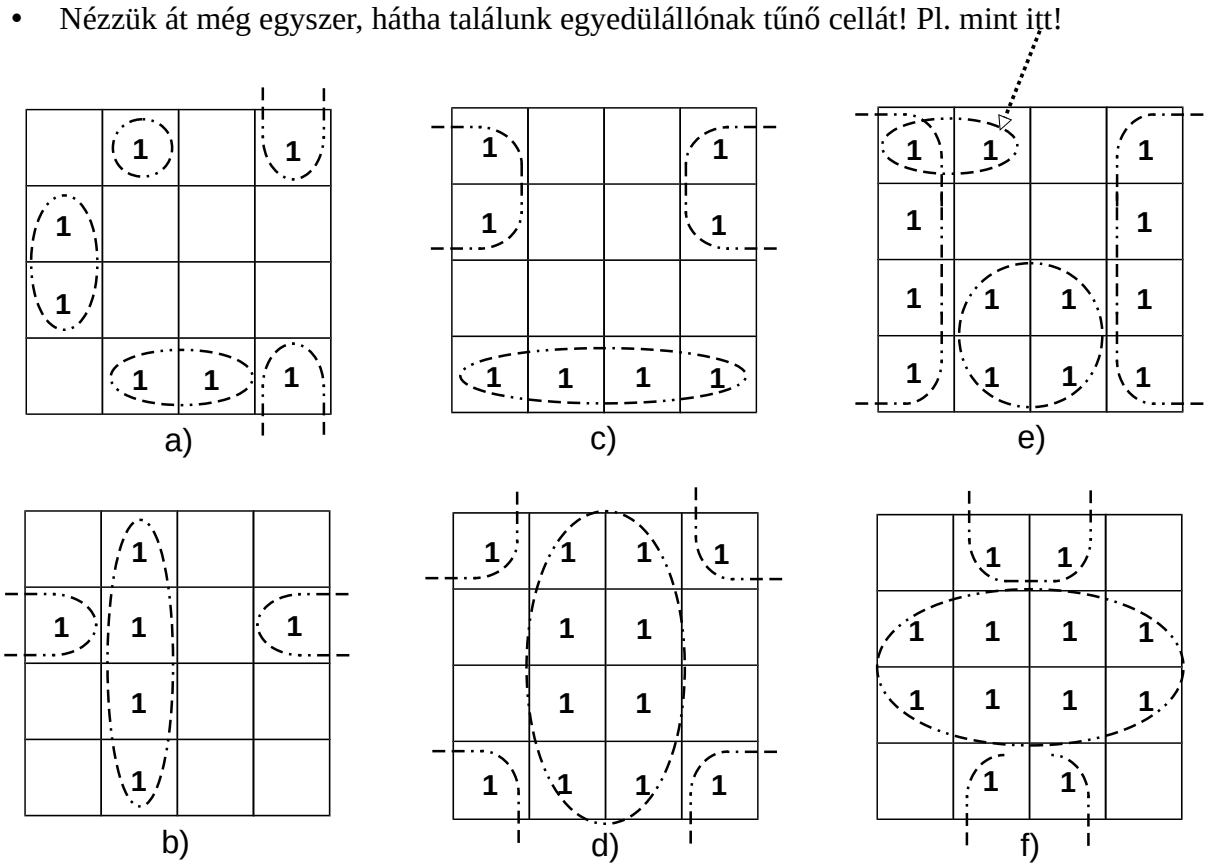
Szomszédosnak tekintendők a tábla szélein, valamint a sarkaiban elhelyezkedő cellák is. Fontos, hogy minden olyan cellát tömbösítsünk, amelynek van oldalszomszédja. Egy cella több csoportban is szerepelhet.



8.6. ábra A Karnaugh-tábla felfogható, mint egy tóruszra feszített négyzetlap (forrás: Wikipédia).

Az tömbösítés műveleti sorrendje:

- Keressük meg az egyedülálló 1-eseket, ezek önálló (egy tagú) csoportokat alkotnak;
- Keressük meg a 2-es, 4-es és 8-as csoportokat;
- Nézzük át még egyszer, hátha találunk egyedülállónak tűnő cellát! Pl. mint itt!



8.7. ábra A négyváltozós diszjunktív normálalakú függvény minterm táblázatos tömbösítése, példák 1-es, 2-es, 4-es és 8-as cellacsoport létrehozására

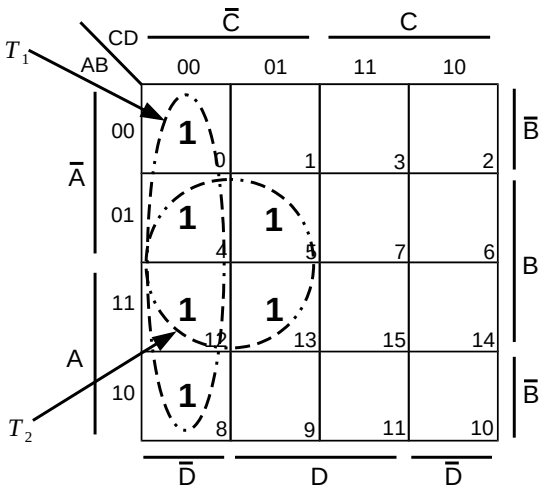
8.3. Diszjunktív normálalakú függvények grafikus egyszerűsítése

Feladat: Ábrázoljuk V-K-táblában az alábbi sorszámos, diszjunktív normálalakú logikai függvényt, majd egyszerűsítsük!

$$Y^4=\Sigma^4(0,4,5,8,12,13)$$

A függvény algebrai alakja (nem szükséges felírni):

$$Y^4=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$$



8.8. ábra Az $Y^4=\Sigma^4(0,4,5,8,12,13)$ függvény V-K-táblája, a tömböket T -vel jelöljük

A tömbösítés után a függvény: $Y^4=T_1+T_2$, ahol T_1 és T_2 a két tömb

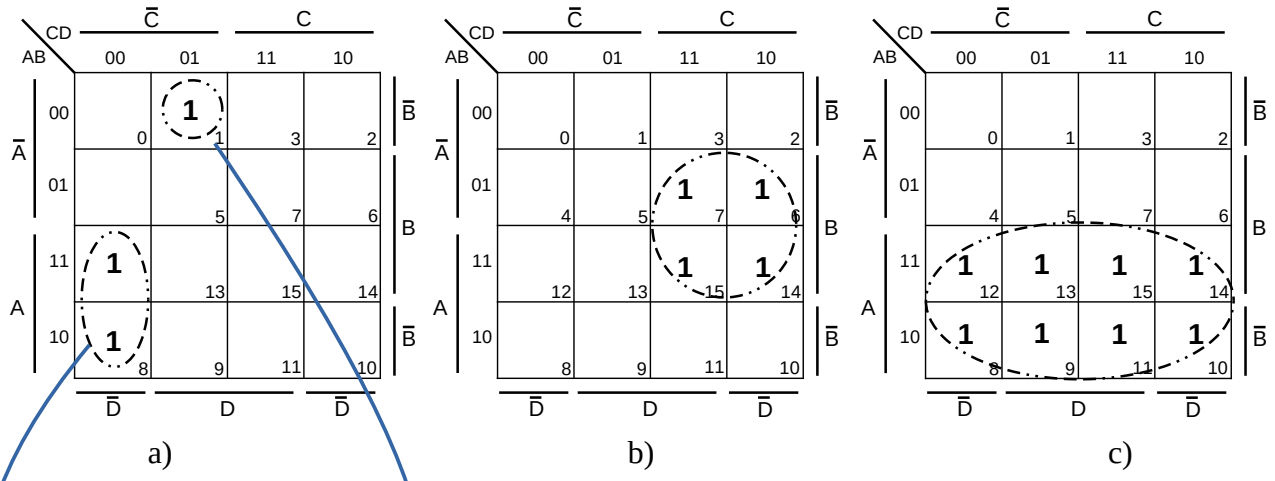
Az egyszerűsített függvény hiányos termjeinek „kifejtése” a következőképpen történik:

- T_1 tömb:
  - A sorindexeket megnézve látható, hogy A változó ponált és negált alakja is előfordul az adott tömbben, vagyis ha $A=0$, vagy ha $A=1$, akkor is 1 a függvény értéke, így az az A -tól független, ezért A-val egyszerűsödik a tömb. Hasonlóképpen alakul ez az B változó esetében is, annak is jelen van mindkét állapota. Ugyanerre a megállapításra jutunk, ha a sorok elején és végén jelzett változók értékét figyeljük meg. Így ezen változóktól nem függ a minterm értéke.
  - Most térjünk rá az oszlopindexekre! Látható, hogy C-nek és D-nek csak a negált értéke található a tömbben. Ugyanez adódik akkor, ha az oszlopok tetején, illetve alján látható változók értékét figyeljük. Ennek megfelelően C és D változó negált értéke esetén 1 értékű a minterm.
  - Mindezek tükrében azt tapasztaljuk, hogy a T_1 -es tömb egy hiányos mintermet ad eredményül, hiszen A és B változó hiányzik belőle.
    - A tömb tehát $T_1=\overline{C}\cdot\overline{D}$ értékű hiányos minterm.

- T_2 tömb:
  - A sorindexek: A változónak mindkét értéke előfordul, B változónak csak a ponált alakja.
  - Az oszlopindexek: C változónak csak a negált alakja fordul elő, D változónak pedig mindkettő.
    - A tömb tehát $T_2 = B \cdot \overline{C}$ értékű hiányos minterm.

- Az egyszerűsített függvényt a két tömb diszjunkciójaként kapjuk meg:
  - $Y^4 = T_1 + T_2 = \overline{C} \cdot \overline{D} + B \cdot \overline{C}$

Az egyszerűsítés folyamán megláthatjuk, hogy a tömbökben résztvevő termek száma és a kapott tömbökben szereplő változók száma között fellelhető az összefüggés. Ennek felismeréséhez nézzük meg a 3.22. ábrát!



8.9. ábra

Végezzük el az egyszerűsítéseket!

3.21. a): $Y^4 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$ => 1 termes tömb => $1 = 2^0$ => 0 változóval egyszerűsödött tömb

3.21. a): $Y^4 = A \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$ => 2 termes tömb => $2 = 2^1$ => 1 változóval egyszerűsödött tömb

3.21. b): $Y^4 = B \cdot C$ => 4 termes tömb => $4 = 2^2$ => 2 változóval egyszerűsödött tömb

3.21. c): $Y^4 = A$ => 8 termes tömb => $8 = 2^3$ => 3 változóval egyszerűsödött tömb

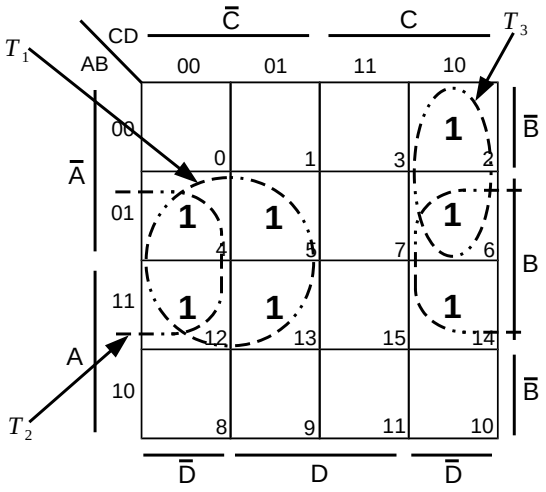
Megfigyigyelhető, hogy ha a tömbökben található termek számát felírjuk 2 hatványaként (2^a , ahol $x \in \mathbb{Z}$), akkor az így kapott szám hatványkitevője megmutatja, hogy a kimeneti tömbből – mint hiányos termből – hány változó hiányzik, vagyis hány változóval egyszerűsödött.

Feladat: Ábrázoljuk V-K-táblában az alábbi sorszámos, diszjunktív normálalakú logikai függvényt, majd egyszerűsítsük!

$$Y^4=\Sigma^4(2,4,5,6,12,13,14)$$

A függvény algebrai alakja (nem szükséges felírni):

$$Y^4=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}+A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$$



8.10. ábra Az $Y^4=\Sigma^4(2,4,5,6,12,13,14)$ függvény V-K-táblája

$T_1=B\cdot\overline{C}$ $\qquad$ $T_2=B\cdot\overline{D}$ $\qquad$ $T_3=\overline{A}\cdot C\cdot\overline{D}$

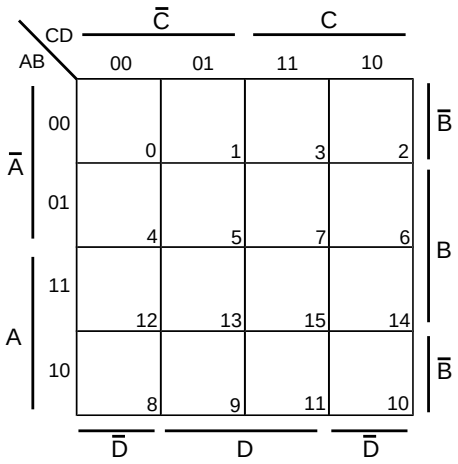
tehát $Y^4=T_1+T_2+T_3=B\cdot\overline{C}+B\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot C\cdot\overline{D}$

8.4. Konjunktív normálalakú függvények grafikus ábrázolása és egyszerűsítése

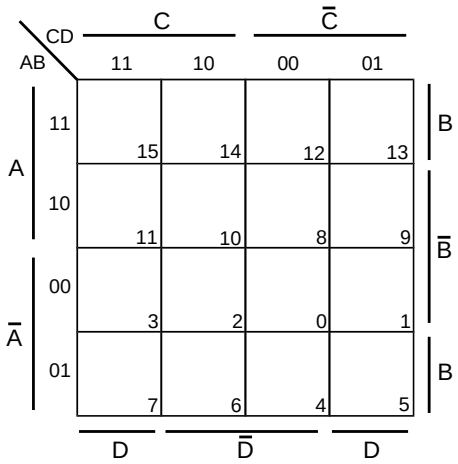
A konjunktív normálalakú függvények grafikus ábrázolására és egyszerűsítésére a maxterm V-K tábla alkalmas.

A maxterm táblát egyszerűen képezhetjük a minterm táblából. Ehhez követnünk kell a mintermekből maxtermekbe átírás szabályait, úgy, hogy táblázat celláit átsorszámozzuk a korábban megismert szabály szerint: $j=(2^n-1)-i$, ahol n a független változók száma, j a maxterm sorszáma, i pedig a minterm sorszáma.

Lássuk be, hogy ez lényegében a sor (A és B), valamint az oszlopindexek (C és D) negálásával teljesíthető! A negálás művelete után írjuk fel a tábla sor- és oszlopindexeit, majd írjuk be sor- oszlopindexekből képzett bináris szám decimális értékét a termek celláiba, s végül jelöljük a változók ponált és negált alakú helyeit, hasonlóan, mint amikor a minterm táblázatot készítettük.



8.11. ábra A négyváltozós minterm tábla

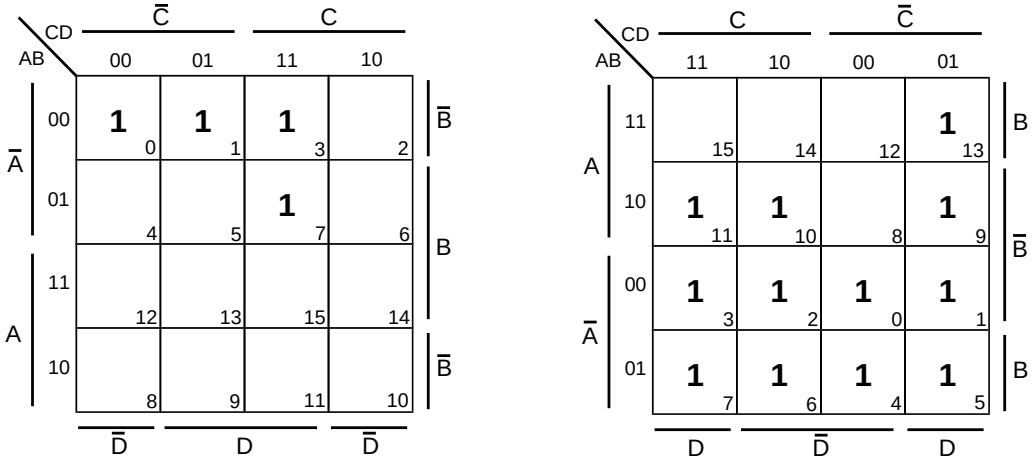


8.12. ábra A kapott négyváltozós maxterm tábla

A termek átírása úgy történik, hogy a maxterm tábla azon celláiba írunk egyeseket, ahol a minterm táblában ugyanazon a helyen nullák álltak (formai szempontból nulla helyek azok, ahol a tábla cellái üresek).

Feladat: Adott a következő négy változós diszjunktív függvény sorszámos alakja: $Y^4=\Sigma^4(0,1,3,7)$. Alakítsuk át a diszjunktív függvényt a konjunktív egyenértékű megfelelőjére!

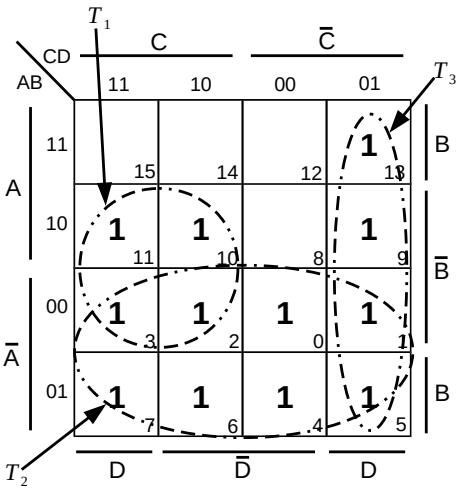
- A minterm táblázatban írjuk be a termek cellájába az egyeseket!
- A maxterm táblázatban azokra a helyekre írjunk be 1-eket, ahol a minterm tábla cellái üresek voltak (formailag 0-ák)!
- Olvassuk ki sorrendben a maxterm táblából az „érvényes” maxtermeket, vagyis írjuk fel a konjunktív sorszámos alakot!



8.13. ábra A sorszámos, diszjunktív függvény átalakítása konjunktívvá

Az egyenértékű konjunktív függvény sorszámos alakja: $Y^4=\Pi^4(0,1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,13)$

A konjunktív függvény grafikus egyszerűsítése hasonlóképpen történik, mint a diszjunktív függvényé. Elvégezve az egyszerűsítést, a következőket kapjuk:



8.14. ábra Az $Y^4=\Pi^4(0,1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,13)$ konjunktív függvény egyszerűsítése

$T_1=\overline{B}+C$ $\qquad$ $T_2=\overline{A}$ $\qquad$ $T_3=\overline{C}+D$

tehát $Y^4=T_1\cdot T_2\cdot T_3=(\overline{B}+C)\cdot(\overline{A})\cdot(\overline{C}+D)$

Ellenőrzésképpen végezzük el az átalakítás algebrai úton!

A függvény: $Y^4=\Sigma^4(0,1,3,7)$

1. negálás, ahol a hiányzó termek lesznek „igazak”: $\overline{Y^4}=\Sigma^3(2,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15)$

2. negálás (kiegészítés 15-re): $\overline{\overline{Y^4}}=Y^4=\Pi^3(0,1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,13)$

$$Y^4=\Pi^4(0,1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,13)$$

Vagyis a grafikusan elvégzett átalakítás összhangban van az algebrai átalakítással:

$$Y^4=\Sigma^4(0,1,3,7)=\Pi^4(0,1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,13)$$