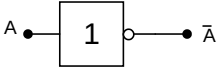
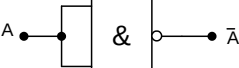
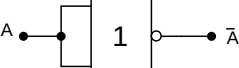
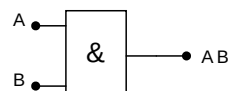
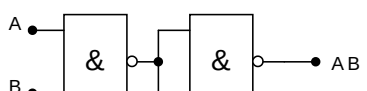
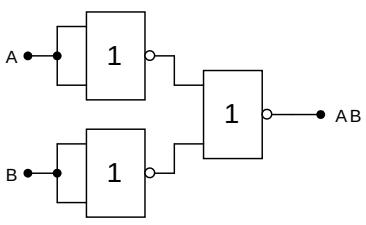
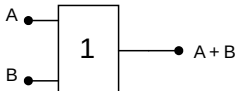
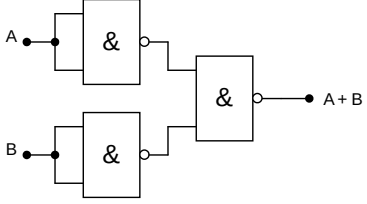
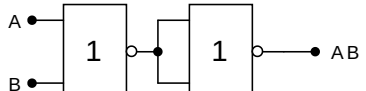


9. A FUNKCIONÁLISAN TELJES RENDSZEREK

A Boole-algebra eszközeivel igazolható, hogy léteznek olyan logikai függvények realizáló kapuáramkörök, melyekkel tetszőleges logikai hálózatokat valósíthatunk meg. Az ilyen logikai függvényeket funkcionálisan teljes rendszernek nevezzük. Minden logikai függvény kifejezhetünk a NEM (negáció), az ÉS, valamint a VAGY műveletek szükséges kombinációjával.

Az NEM-ÉS-VAGY (NÉV) rendszer háromféle kapuáramkört alkalmaz: NEM, ÉS, valamint VAGY kapukat. A gyakorlati realizáció szempontjából a NEM-ÉS-VAGY rendszer pont ezért nem terjedt el, hiszen háromféle kapu gyártása szükséges. Sokkal kedvezőbb a NEM-ÉS (NAND), illetve a NEM-VAGY (NOR) kapus megvalósítások, hiszen az ilyen rendszerekben csak egyféle típusú kapuáramköröket kell alkalmazni.

A kapuk más kapukkal történő realizálását, valamint a vonatkozó De-Morgan azonosságokat a 9.1. táblázatban tekinthetjük meg.

A LOGIKAI KAPUK ÉS RENDSZEREK TÍPUSAI		
NEM – ÉS – VAGY (NÉV)	NEM-ÉS (NAND)	NEM-VAGY (NOR)
 NEM (NOT): $\bar{A}$	 $\bar{A} = \overline{A \cdot B}$	 $\bar{A} = \overline{A + B}$
 ÉS (AND): $A \cdot B$	 $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$	 $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$
 VAGY (OR): $A + B$	 $A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$	 $A + B = \overline{\overline{A + B}}$

9.1. táblázat

Az logikai függvények által megvalósítandó áramkörök esetén törekednünk kell arra, hogy mindez a lehető legkevesebb áramköri elemmel történjen. A függvények egyszerűsítése (lásd előző fejezet) is ezt a célt szolgálta. Mindennek köszönhetően csökken a kész áramkör helyfoglalása, valamint alacsony értékű lesz a fogyasztás.

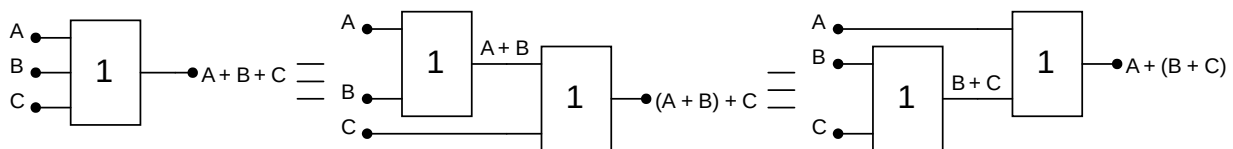
9.1. Megvalósítás kétbemenetű kapuáramkörökkel

A funkcionálisan teljes rendszerek leíró függvényei az egyes logikai szinteken kettő, vagy annál több bemenetű kapuáramkörök alkalmazását teszi szükségessé. A NAND és a NOR hálózatok alkalmazása költséghatékony kialakításokat eredményezhet. További előnyökhöz juthatunk e téren, ha törekszünk a minimális bemenetszámra. Ilyen célunk lehet, ha csak kétbemenetű kapukat alkalmazunk. Az ilyen átalakítások feltétele, az adott függvény asszociatív legyen. E kritériumnak a következő logikai függvények felelnek meg: az OR, az AND, a XOR és az XNOR.

Nézzük meg egy-egy kapu kiváltását kétbemenetűekkel, példákon keresztül!

9.11. A VAGY kapcsolat 1. példa: $Y^3 = A + B + C$.

A kapcsolat asszociatív tulajdonsága miatt: $Y^3 = A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$



9.1. ábra

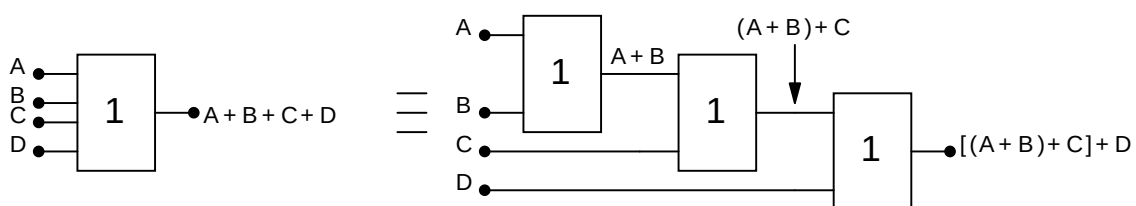
2. példa: Az asszociatív kapcsolat n tag diszjunktív kapcsolatra igaz. $A + B + C + \dots + N$

Nézzük meg ezt példán keresztül! $Y^3 = A + B + C + D$

Több variáció is lehetséges a társíthatóságra, egy megoldáson kövessük végig az átalakítást!

$$Y^3 = A + B + C = [(A + B) + C] + D$$

A realizálást a belső függvénnyel kezdjük, majd „kifelé” haladunk.



9.2. ábra

Az asszociatív szabály alkalmazásának hatására:

- csökkent a kapuk bemeneteinek száma (egyszerűbb kapuáramkörök alkalmazhatók);
- nőtt a kapuk száma (növekszik a felvett teljesítmény, növekszik a méret);
- többszintű lett a hálózat (növekszik a jelterjedési idő, csökken a jelterjedési sebesség);
- az egyes ágak között eltérő a jelterjedési idő, amely nem valós kimeneti szinteket eredményezhet ($\Rightarrow$ hazard).

A	B	C	$A+B$	$(A+B)+C$	$A+B+C$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

9.2. táblázat

Az asszociatív szabály alkalmazhatóságának igazolásaképpen célszerű elemezni a feladat igazságtáblázatát. Ebből kitűnik, hogy a VAGY kapcsolat függvényértéke – függetlenül a bemenetek számától – akkor igaz (1), ha legalább egy bemeneti változó igaz (1). További megfigyelés, hogy az asszociatív szabály „működik”, hiszen:

$$Y^3 = A+B+C = (A+B)+C$$

9.12. Az ÉS kapcsolat

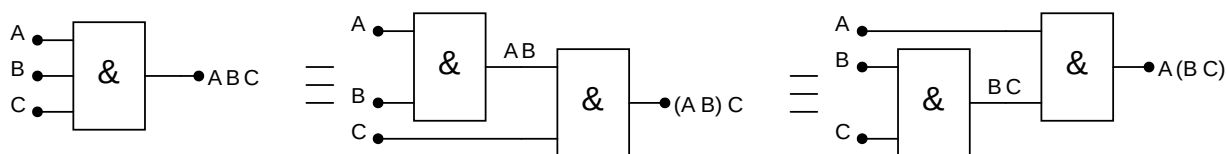
Igazoljuk, hogy $Y^3 = A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$!

A	B	C	$A \cdot B$	$(A \cdot B) \cdot C$	$A \cdot B \cdot C$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

9.3. táblázat

Hasonlóképpen igazolható, hogy az ÉS kapcsolat esetén is alkalmazható az asszociatív szabály, vagyis több bemenetű kapuk kiválthatók kétbemenetű kapukkal, azzal, hogy ebben az esetben is nő a szintek száma. Az ÉS kapcsolat függvényértéke csak akkor igaz (1), ha valamennyi bemeneti változó igaz (1).

$$Y^3 = A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$$



9.3. ábra

9.13. A KIZÁRÓ-VAGY és a KIZÁRÓ-NEM-VAGY kapcsolat

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$Y = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

Idézzük fel a tanultakat: A KIZÁRÓ-VAGY kapcsolat kimenete akkor 1 értékű, ha a bemeneti változók értéke különböző (antivalencia). A KIZÁRÓ-NEM-VAGY kapcsolat ennek az invertált függvénye: akkor 1 értékű a kimenet, ha a bemeneti változók értéke azonos. Fontos azonban, hogy mindez csak két bemeneti változó esetén értelmezhető így. Ha ennél több változó van, a függvény értelmezését másképp kell megfogalmazni.

A	B	$A \odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$Y = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

KIZÁRÓ-VAGY: kettő, vagy több változó esetén is igaz, hogy a kimenet akkor 1 értékű, ha a bemeneti 1-es változók száma páratlan.

KIZÁRÓ-NEM-VAGY: a kimenet akkor 1 értékű, ha a bemeneti 0-ás változók száma páratlan.

Igazoljuk mindezt háromváltozós függvényekkel!

KIZÁRÓ-VAGY:
$$A \oplus B \oplus C = (A \oplus B) \oplus C = (A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) \oplus C = A \oplus B \cdot \bar{C} + \overline{A \oplus B} \cdot C =$$

$$= (A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) \cdot \bar{C} + \overline{A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B} \cdot C$$

 ahol $A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

9.4. táblázat

A	B	C	$A \oplus B$	$\overline{A \oplus B}$	$\bar{C}$	$A \oplus B \cdot \bar{C}$	$\overline{A \oplus B} \cdot C$	$A \oplus B \oplus C$
0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1	1

Páratlan 1-ek

(a függvényérték: 1)

KIZÁRÓ-NEM-VAGY:
$$A \oplus B \oplus C = (A \oplus B) \oplus C = (A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) \oplus C = A \oplus B \cdot \bar{C} + \overline{A \oplus B} \cdot C =$$

$$= (A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) \cdot \bar{C} + \overline{A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B} \cdot C$$

 ahol $A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

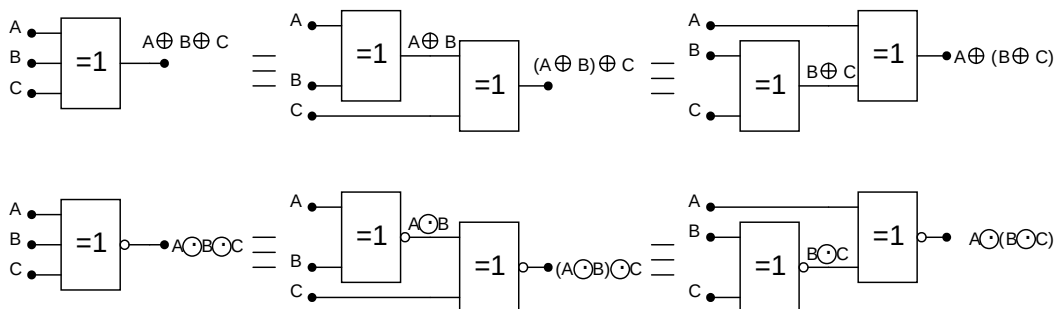
9.5. táblázat

A	B	C	$A \odot B$	$\overline{A \odot B}$	$\bar{C}$	$A \odot B \cdot \bar{C}$	$\overline{A \odot B} \cdot C$	$A \odot B \oplus C$
0	0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0

Páratlan 0-ák

(a függvényérték: 1)

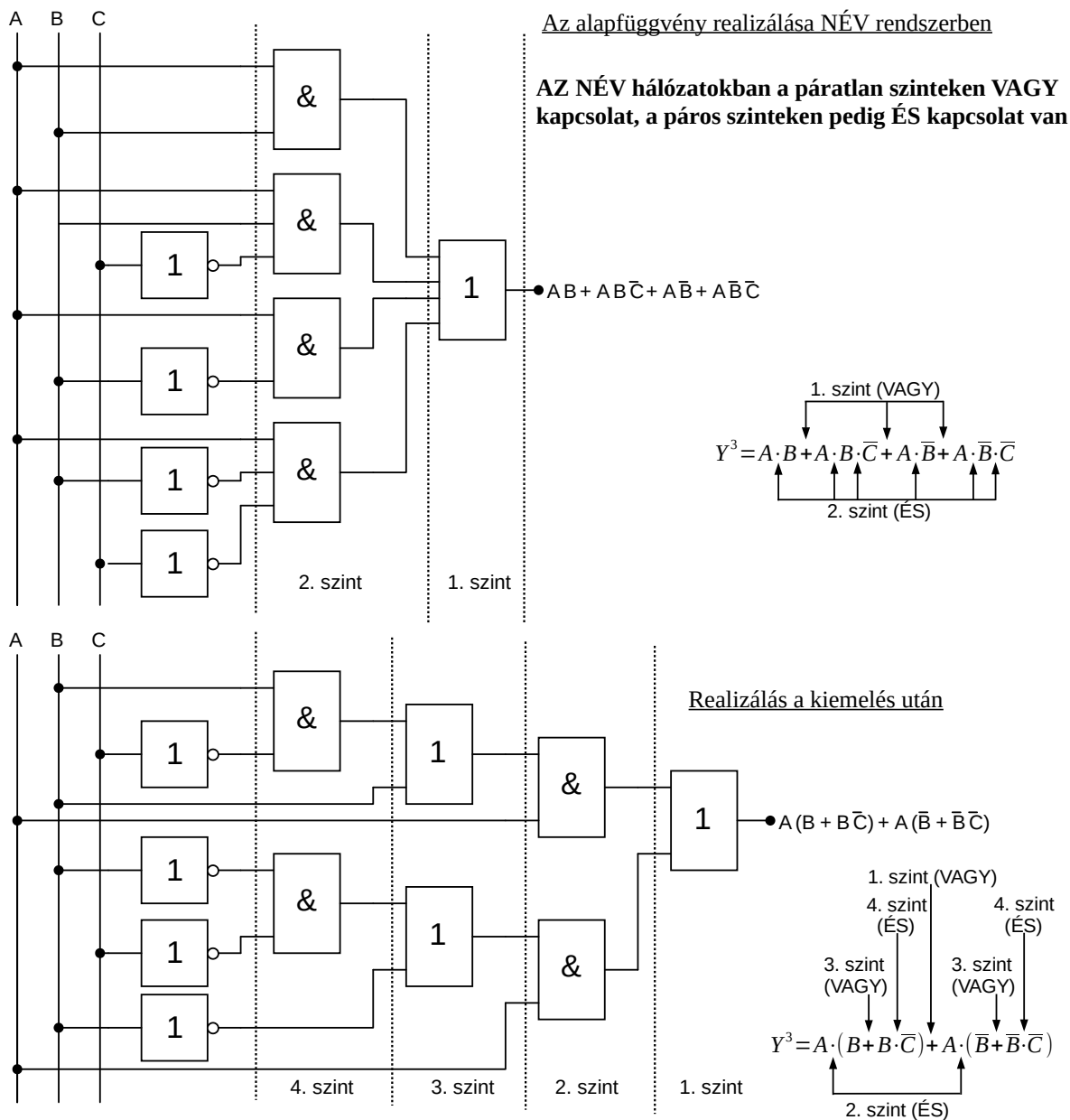
9.4. ábra



9.2. NEM-ÉS-VAGY (NÉV) rendszer

Mint ismeretes az NÉV rendszer háromféle kaput alkalmaz a logikai függvények megvalósítására. Egy példán keresztül megláthatjuk, hogy a kis méret és az alacsony fogyasztás mellett egy harmadik fontos szempont is adódik: a késleltetési idő (jelterjedési idő) alacsony értéken tartása. Minden kapunak van tehát késleltetési ideje. Minél több szintű egy hálózat, az eredő jelterjedési idő annál nagyobb (összeadódik). Az egyes kapuszinteket a kimenettől haladva a bemenet felé sorszámozzuk. Az inverterek nem tekintendők külön logikai szintnek. A disztributív szabályt alkalmazzuk alakítsuk át, majd realizáljuk az eredeti és az átalakított függvényt!

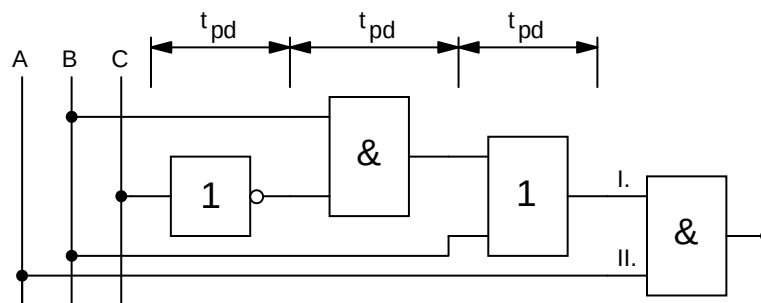
$$Y^3 = A \cdot B + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \quad \Rightarrow \quad Y^3 = A \cdot (B + B \cdot \bar{C}) + A \cdot (\bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{C})$$



9.5. ábra

A két realizálás között több különbséget is felfedezünk. A kiemelés hatására:

- csökkent a kapuk bemeneteinek száma (egyszerűbb kapuáramkörök alkalmazhatók);
- nőtt a kapuk száma (növekszik a felvett teljesítmény, növekszik a méret);
- több szintű lett a hálózat (növekszik a jelterjedési idő);
- az egyes ágak között eltérő a jelterjedési idő, amely nem valós kimeneti szinteket eredményezhet ($\Rightarrow$ hazardjelenségek). Figyeljük meg az alábbi ábrát!



9.6. ábra

A legkisebb szinten található ÉS kapunak két bemenete van. Az I-es kapu bemenetre késleltetve érkezik meg a jel, három kapun keresztül, melyek jelterjedési ideje összeadódik. A II-es bemenetre viszont késés nélkül érkezik a jel, így a szükséges bemeneti jelek nem azonos időben, hanem időben eltolva jelennek meg, ennek pedig fals kimeneti jelek lehetnek az eredményei.

Bármely rendszerben megfigyelhetjük, hogy a szintek számát az azonos rendű logikai műveletek száma határozza meg. A kiinduló példánk ($Y^3 = A \cdot B + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$) lényegében konjunktív tagok diszjunkciója, ahol csak ez a két logikai függvény található meg (vagyis az ÉS, illetve a VAGY), ennek megfelelően kétszintű a hálózat.

A NÉV hálózatokban a páratlan szinteken VAGY, a páros szinteken pedig ÉS kapcsolat van.

9.3. NEM-ÉS (NAND) RENDSZER

A De Morgan azonosságokat felidézve beláthatjuk, hogy az NÉV hálózatok könnyen átalakíthatók NAND hálózatokká. Az alkalmazandó De Morgan azonosság: $A + B = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$.

Nézzük a kiinduló, diszjunktív függvényünket! $Y^3 = A \cdot B + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$. Az azonosságot alkalmazva a következő formulához jutunk:

$$Y^3 = A \cdot B + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = \overline{\overline{A \cdot B} \cdot \overline{A \cdot B \cdot \bar{C}} \cdot \overline{A \cdot \bar{B}} \cdot \overline{A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}}}$$

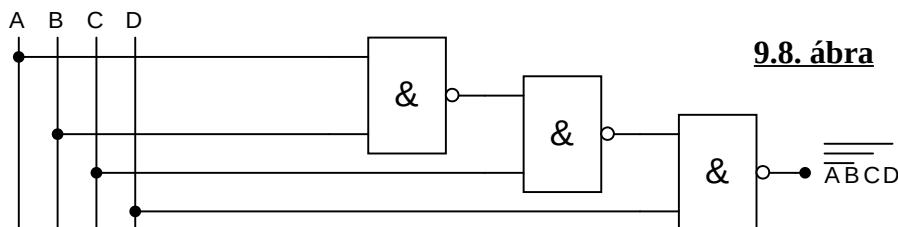
Az áramköri realizáláshoz a X. táblázat vonatkozó összefüggései:

- NEM: $\bar{A} = \overline{A \cdot \bar{A}} \Rightarrow$ tautológia $\Rightarrow$ csere NAND kapura
- ÉS: $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}} \Rightarrow$ Boole algebrai azonosság $\Rightarrow$ csere NAND kapura
- VAGY: $A + B = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}} \Rightarrow$ De Morgan azonosság $\Rightarrow$ csere NAND kapura



NÉV hálózathól átalakítás után kapott NAND hálózat.

A NEM-ÉS (NAND) kapukkal felépített hálózatok is funkcionálisan teljes rendszerek, hiszen tetszőleges logikai függvény kifejezhető a NEM-ÉS (NAND) logikai kapuk megfelelő összekapcsolásával.



9.8. ábra

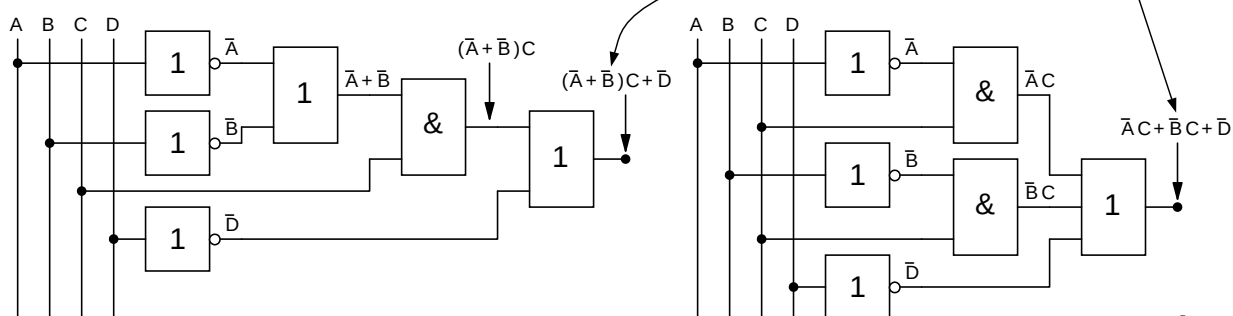
Nézzük a következő NAND hálózatot!

Állapítsuk meg a kimeneti függvényt! $\Rightarrow Y^4 = \overline{\overline{\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D}}}$

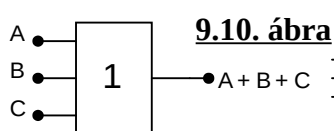
De Morgan azonossággal alakítsuk át a függvényt!

$$Y^4 = \overline{\overline{\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D}}} \Rightarrow Y^4 = \overline{(\overline{A \cdot B \cdot C}) \cdot \overline{D}} = \overline{A \cdot B \cdot C} + \overline{D} = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot \overline{C} + \overline{D} = \overline{A} \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{D}$$

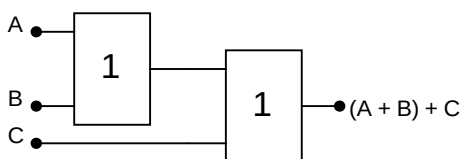
Az átalakítás eredménye NÉV-hálózatot jelez. Realizáljuk!



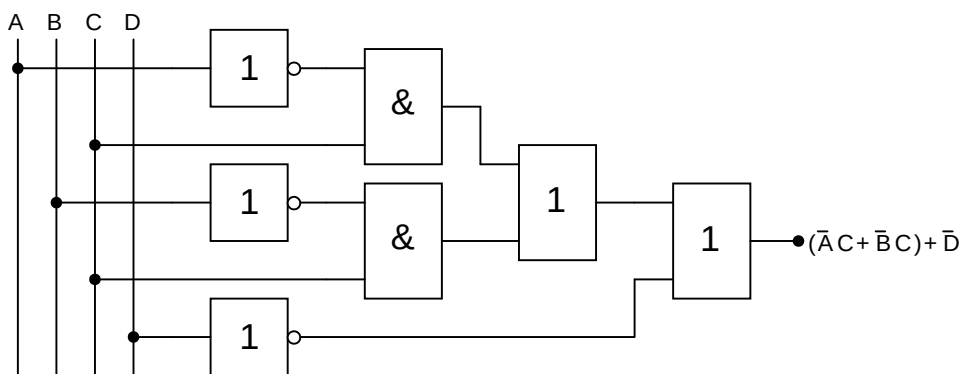
9.9. ábra



9.10. ábra

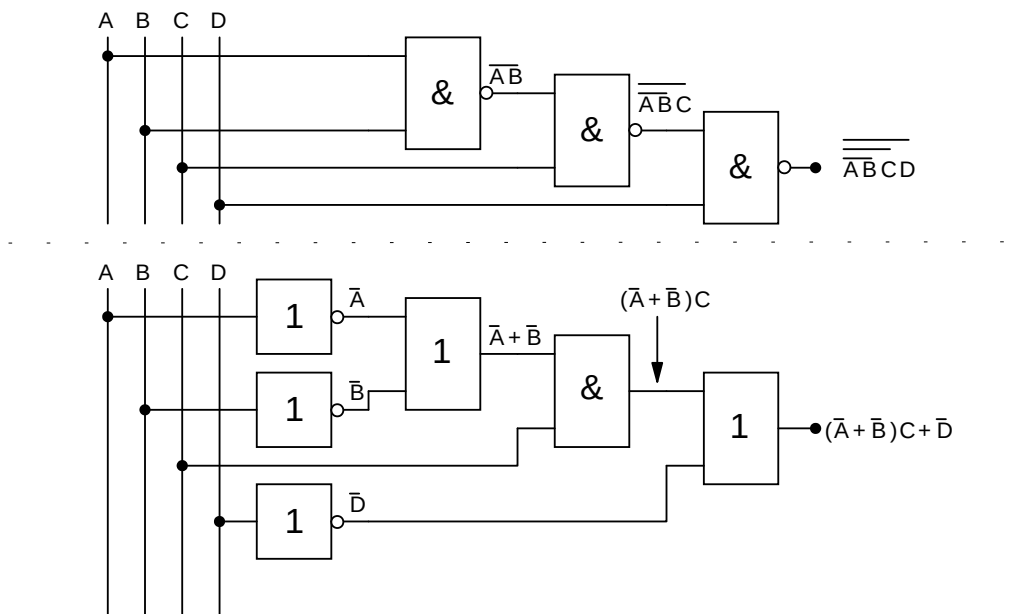


A VAGY művelet disztributív
 $\{ A + B + C = (A + B) + C \}$
 tulajdonsága okán az
 $Y^4 = \overline{A} \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{D}$ formulát
 átalakíthatjuk:



9.11. ábra

A hárombemenetű VAGY kapu kiváltható két darab kétbemenetű kapuval, noha így növekszik a logikai szintek száma. Az így kapott függvény és a realizált hálózat az 9.11. ábrán látható.



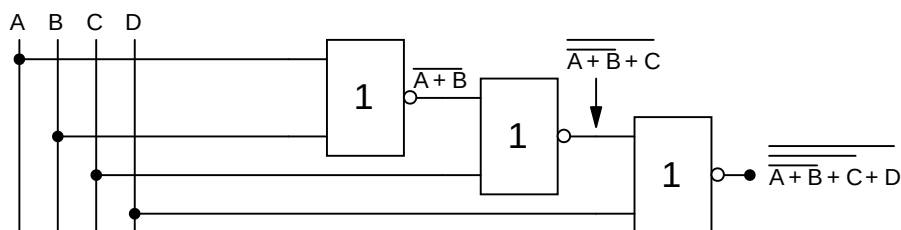
9.12. ábra

Vegyük szemügyre ismét az átalakítást (x. ábra), ahol $Y^4 = ((\overline{A \cdot B \cdot C}) \cdot D) = (\overline{A+B}) \cdot C + \overline{D}$! A következőket állapíthatjuk meg. A NÉV hálózatokban, NAND => NÉV átalakítás során:

- páratlan szinteken VAGY, páros szinteken pedig ÉS kapcsolat van;
- páratlan szinteken a jelek negáltan érkeznek meg;
- páros szinteken a jelek ponált alakúak.

9.4. NEM-VAGY (NOR) RENDSZER

A NEM-VAGY (NOR) kapukkal felépített hálózatok is funkcionálisan teljes rendszerek, hiszen ezekkel is tetszőleges logikai függvény kifejezhető a NEM-ÉS (NAND) logikai kapuk megfelelő összekapcsolásával.



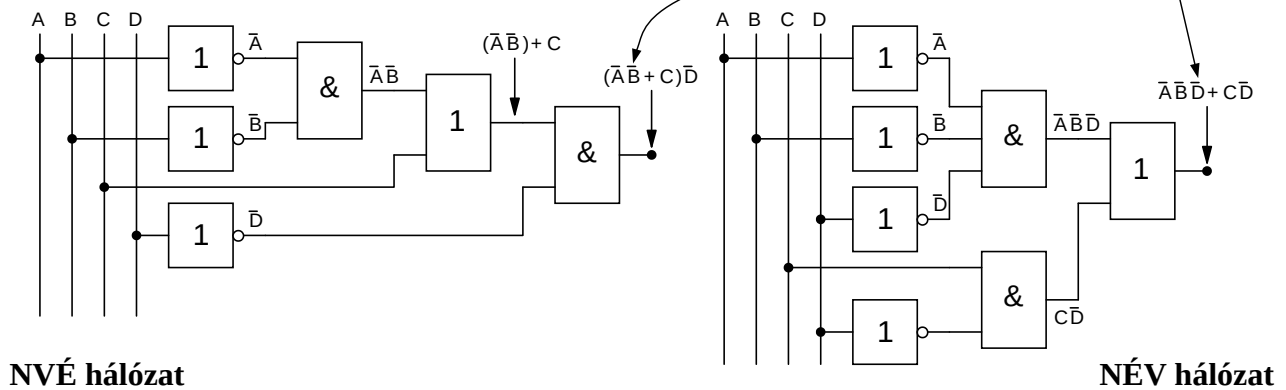
9.13. ábra

Állapítsuk meg a kimeneti függvényt! $\Rightarrow Y^4 = \overline{\overline{A+B+C} \cdot D}$

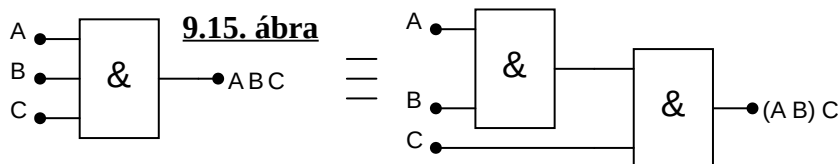
De Morgan azonossággal alakítsuk át a függvényt!

$$Y^4 = \overline{\overline{\overline{A+B+C}+D}} \Rightarrow Y^4 = \overline{\overline{A+B+C}+D} = (\overline{A+B+C}) \cdot \overline{D} = (\overline{A} \cdot \overline{B} + C) \cdot \overline{D} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{D} + C \cdot \overline{D}$$

Az átalakítás eredménye NÉV-hálózatot jelez. Realizáljuk!

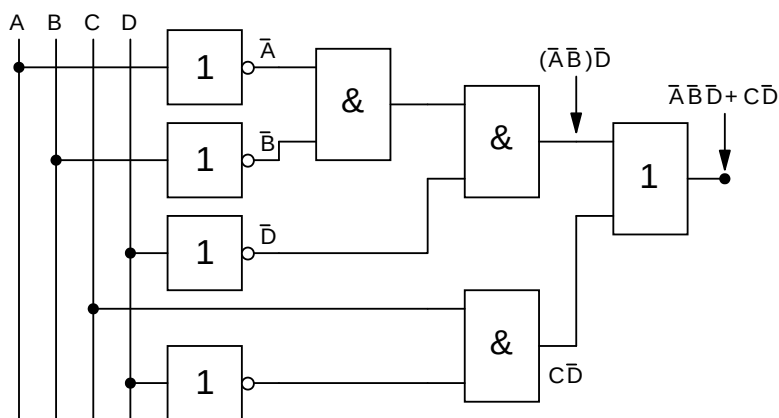


9.14. ábra



9.15. ábra

Az ÉS művelet disztributív
 $\{ A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C \}$
tulajdonsága okán az
 $Y^4 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{D} + C \cdot \overline{D}$ formula
átalakítható:

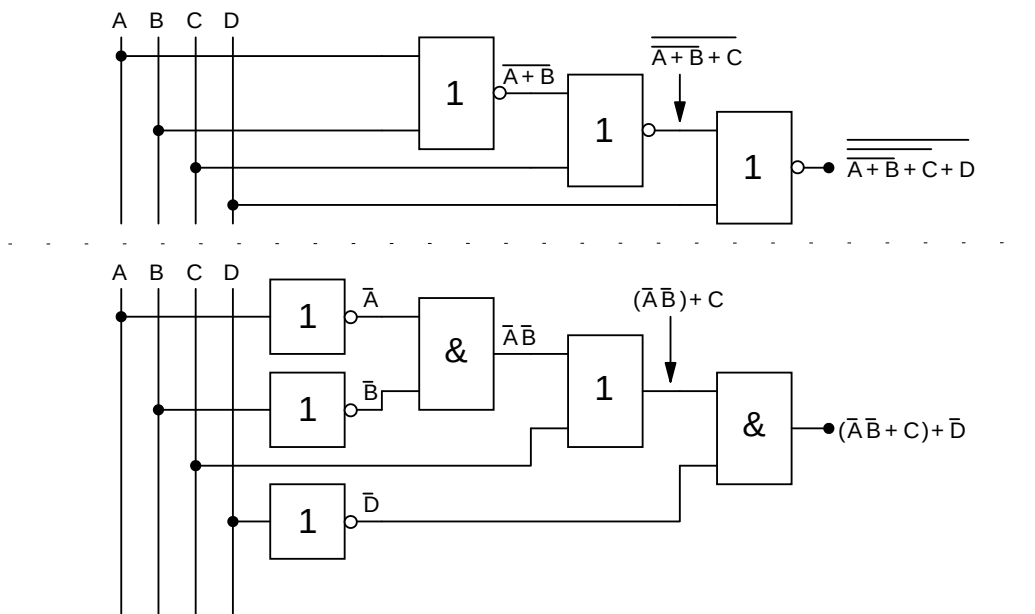


9.16. ábra

A hárombemenetű ÉS kapu kiváltható két darab kétbemenetű kapuval, noha így növekszik a logikai szintek száma. Az így kapott függvény és a realizált hálózat az 9.16. ábrán látható.

Vessünk néhány pillantást az átalakításra (x. ábra), ahol $Y^4 = \overline{\overline{\overline{A+B+C}+D}} = (\overline{A} \cdot \overline{B} + C) \cdot \overline{D}$! A következők állapíthatók meg. A NÉV (valójában inkább NVÉ) hálózatokban, NAND $\Rightarrow$ NVÉ átalakítás során:

- páratlan szinteken ÉS, páros szinteken pedig VAGY kapcsolat van;
- páratlan szinteken a jelek negáltan érkeznek meg;
- páros szinteken a jelek ponált alakúak.

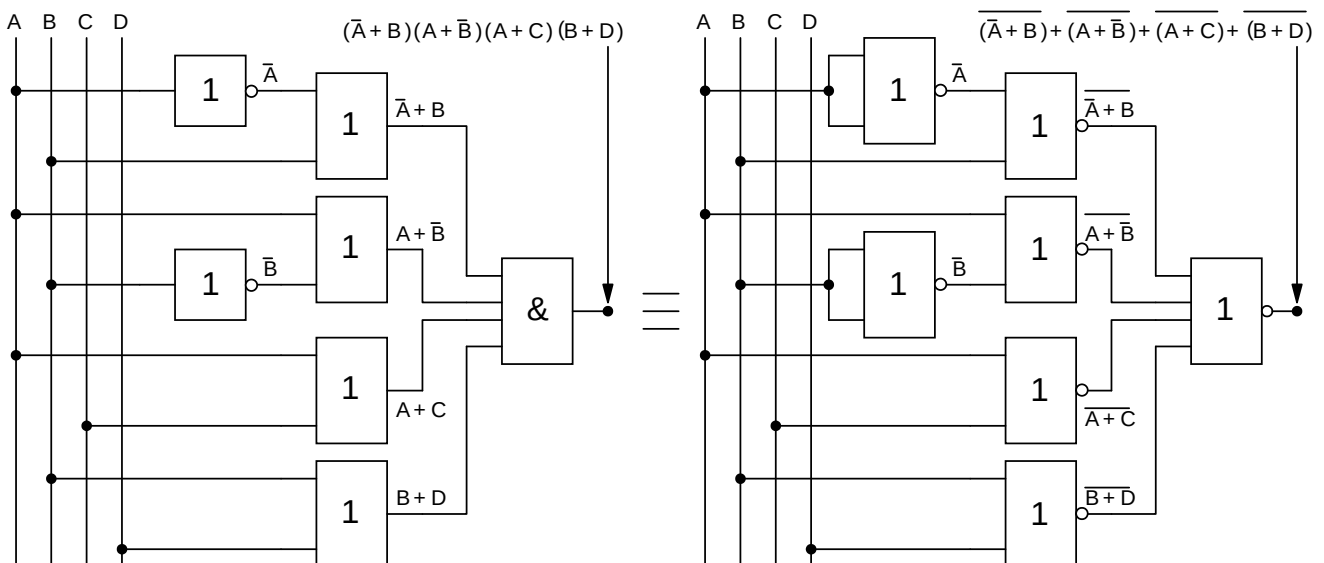


9.17. ábra

Nézzük a kiinduló, konjunktív függvényünket! $Y^4 = (\bar{A}+B) \cdot (A+\bar{B}) \cdot (A+C) \cdot (B+D)$. Átalakítás után a következő alakot kapjuk: $Y^4 = \overline{(\bar{A}+B) + (A+\bar{B}) + (A+C) + (B+D)}$

Az áramköri realizáláshoz a X. táblázat vonatkozó összefüggései:

- NEM: $\bar{A} = \overline{A+A}$ $\Rightarrow$ tautológia $\Rightarrow$ csere NOR kapura
- VAGY: $A+B = \overline{\overline{A+B}}$ $\Rightarrow$ Boole algebrai azonosság $\Rightarrow$ csere NOR kapura
- ÉS: $A \cdot B = \overline{\bar{A} + \bar{B}}$ $\Rightarrow$ De Morgan azonosság $\Rightarrow$ csere NOR kapura



9.18. ábra A realizált NÉV (NVÉ) hálózat, majd az abból átalakított NOR hálózat

A kétszintű függvények realizációja kétféle eredményt ad:

- A konjunktív alakú függvények eredménye az NÉV hálózat, melyből átalakítás után NAND hálózatot kapunk.*
- A diszjunktív alakú függvények eredménye az NVÉ hálózat, melyből átalakítás után NOR hálózatot kapunk.*